**ccBỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP HÀ NỘI**

---o0o---

**BÁO CÁO BÀI TẬP LỚN MÔN XÁC SUẤT THỐNG KÊ**



**Giáo viên hướng dẫn: Nguyễn Thị Hằng Lớp:** [**20214BS6008001**](https://sv.dhcnhn.vn/sso/blearning)

#### Nhóm thực hiện: Nhóm 5

***Hà Nội, tháng 7 năm 2022***



**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP HÀ NỘI**

---o0o---

**BÁO CÁO BÀI TẬP LỚN MÔN XÁC SUẤT THỐNG KÊ**

**Giáo viên hướng dẫn:** Nguyễn Thị Hằng

#### Sinh viên thực hiện:

Trương Thị Bích Nguyễn Thúy Dân Lê Văn Dương Phạm Quang Kiên Tạ Phương Linh Bùi Vũ Huyền Linh Trịnh Quang Nam Hà Bích Ngọc (NT)

***Hà Nội, tháng 7 năm 2022***

2

# Bảng đánh giá hoạt động nhóm

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| STT | Họ và tên | Số lượng ví dụ  đã làm | Nộp bài đúng thời gian | Nộp đúng theo yêu cầu | Đánh giá |
| 1 | Trương Thị Bích | 20 |  | 7.5 | Nộp bài nhiều lỗi, không khắc phục lỗi trình bày sau khi nhắc nhở nhiều  lần |
| 2 | Nguyễn Thúy Dân | 20 |  | 9.5 | Đã khắc phục lỗi trình bày sau lần nhắc nhở, hoàn thành công việc được giao tương đối  nhanh |
| 3 | Lê Văn Dương | 20 |  | 9 | Thỉnh thoảng làm việc  hơi ẩu nhưng đáp ứng đủ yêu cầu được giao |
| 4 | Phạm Quang Kiên | 20 |  | 9.5 | Nộp đáp ứng yêu cầu được giao, đã khắc phục được lỗi trình bày sau  khi nhắc nhở |
| 5 | Tạ Phương  Linh | 10 |  |  | (Đã bị đuổi khỏi lớp) |
| 6 | Bùi Vũ Huyền Linh | 20 |  | 9.5 | Nộp đáp ứng yêu cầu được giao, đã khắc phục được lỗi trình bày sau  khi nhắc nhở |
| 7 | Trịnh Quang Nam | 20 |  | 9 | Nộp đáp ứng yêu cầu được giao, nhưng vẫn  mắc lỗi trình bày |
| 8 | Hà Bích  Ngọc | 35 |  | 9.5 | Tốt |

# MỤC LỤC

[Bảng đánh giá hoạt động nhóm 3](#_bookmark0)

[MỤC LỤC 4](#_bookmark1)

[CHƯƠNG 1: BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT 6](#_bookmark2)

* 1. [CÔNG THỨC CỘNG, NHÂN XÁC SUẤT 6](#_bookmark3)
  2. [CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐẦY ĐỦ - CÔNG THỨC BAYES 12](#_bookmark4)
     1. [CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐẦY ĐỦ 13](#_bookmark5)
     2. [CÔNG THỨC BAYES 19](#_bookmark6)
  3. [CÔNG THỨC BERNOULLI 27](#_bookmark7)

[CHƯƠNG 2: ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN, QUY LUẬT PHÂN BỐ XÁC SUẤT 29](#_bookmark8)

* 1. [ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN 29](#_bookmark9)
  2. [PHÂN BỐ XÁC SUẤT 32](#_bookmark10)
  3. [CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN 36](#_bookmark11)
     1. [KỲ VỌNG 36](#_bookmark12)
     2. [PHƯƠNG SAI 39](#_bookmark13)
     3. [ĐỘ LỆCH CHUẨN 41](#_bookmark14)
  4. [MỘT SỐ PHÂN PHỐI XÁC SUẤT THƯỜNG GẶP 45](#_bookmark15)
     1. [PHÂN PHỐI NHỊ THỨC 45](#_bookmark16)
     2. [PHÂN PHỐI POISSON 47](#_bookmark17)
     3. [PHÂN PHỐI CHUẨN 50](#_bookmark18)

[CHƯƠNG 3: LÝ THUYẾT MẪU 53](#_bookmark19)

* 1. [CÁC ĐẶC TRƯNG MẪU 53](#_bookmark20)
     1. [KỲ VỌNG MẪU (TRUNG BÌNH MẪU) 53](#_bookmark21)
     2. [PHƯƠNG SAI MẪU 56](#_bookmark22)
     3. [PHƯƠNG SAI MẪU HIỆU CHỈNH 61](#_bookmark23)
     4. [CÁCH TÍNH 𝑿 VÀ 𝑺𝟐 65](#_bookmark24)

[CHƯƠNG 4: ƯỚC LƯỢNG THAM SỐ CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN 75](#_bookmark25)

* 1. [ƯỚC LƯỢNG ĐIỂM 75](#_bookmark26)
  2. [ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG TIN CẬY 80](#_bookmark27)
     1. [ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CHO KỲ VỌNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN .80](#_bookmark28)
     2. [ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CHO XÁC SUẤT (TỈ LỆ) 83](#_bookmark29)
     3. [MỘT SỐ CHỈ TIÊU CỦA BÀI TOÁN ƯỚC LƯỢNG 88](#_bookmark30)

[CHƯƠNG 5: KIỂM ĐỊNH GIẢ THIẾT THỐNG KÊ 98](#_bookmark31)

* 1. [KIỂM ĐỊNH GIẢ THIẾT CHO GIÁ TRỊ KỲ VỌNG 98](#_bookmark32)
  2. [KIỂM ĐỊNH GIẢ THIẾT CHO GIÁ TRỊ XÁC SUẤT 106](#_bookmark33)

# CHƯƠNG 1: BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

#### CÔNG THỨC CỘNG, NHÂN XÁC SUẤT

**Ví dụ 1** (Trịnh Quang Nam): Trong một chiếc hộp có 20 viên bi, trong đó có 8 viên bi màu đỏ, 7 viên bi màu xanh và 5 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên ra 3 viên bi. Tìm xác suất để:

1. 3 viên bi lấy ra đều màu đỏ
2. 3 viên bi lấy ra có không quá hai màu.

#### Giải

Gọi biến cố A :" 3 viên bi lấy ra đều màu đỏ"

B : "3 viên bi lấy ra có không quá hai màu"

Số các lấy 3 viên bi từ 20 viên bi là: =1140

1. Số cách lấy 3 viên bi màu đỏ là: =56

**Do đó: P(A)**= 56\1140

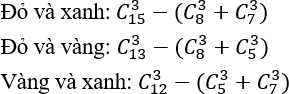
=

1. Ta có:

Số cách lấy 3 viên bi chỉ có một màu:



Số cách lấy 3 viên bi có đúng hai màu



Nên số cách lấy 3 viên bi có đúng hai màu:



P(B)= 43/57

**Ví dụ 2** (Trịnh Quang Nam): Một hộp thuốc có 5 ống thuốc tốt và 3 ống kém chất lượng. Chọn ngẫu nhiên lần lượt không trả lại 2 ống. Tính xác suất để:

a/ Cả hai ống được chọn đều tốt.

b/ Chỉ ống được chọn ra đầu tiên là tốt.

c/ trong hai ống có ít nhất một ống thuốc tốt

#### Giải

Chọn ngẫu nhiên lần lượt không trả lại 2 trong 8 ống nên các trường hợp đồng khả năng là A2 8

a/ A:” Cả hai ống được chọn đều tốt”



b/ B:” Chỉ ống được chọn ra đầu tiên là tốt”



c/ C:” trong hai ống có ít nhất một ống thuốc tốt”



**Ví dụ 3** (Trịnh Quang Nam): Một hộp chưa 5 quả cầu trắng, 3 quả cầu xanh, 4 quả cầu đen cùng kích thước. Chọn ngẫu nhiên 3 quả cầu:

1. Tìm xác suất để lấy được 3 quả trắng
2. Tìm xác suất để lấy được 2 quả cùng màu

#### Giải

1. Gọi A là biến cố lấy ra 3 quả cầu trắng

P(A) = C3 = 1

5

C

3

12 22

1. Gọi B là biến cố lấy được 2 quả cùng màu.

Xác suất để 2 quả lấy ra cùng màu trắng là: C2.C1 =

C

3

5 7

12

Xác suất để 2 quả lấy ra cùng màu xanh là: C2.C1 =

C

3

3 9

12

7

22

27

220

Xác suất để 2 quả lấy ra cùng màu đen là: C2.C1 = 12

C

3

4 8

12 55

P(B)= 7

+ 27

+ 12 = 29

22 220 55 44

**Ví dụ 4** (Trịnh Quang Nam): Một hộp chưa 5 quả cầu trắng, 3 quả cầu xanh, 4 quả cầu đen cùng kích thước. Chọn ngẫu nhiên 3 quả cầu:

1. Tìm xác suất để lấy được 3 quả trắng
2. Tìm xác suất để lấy được 2 quả cùng màu

#### Giải

1. Gọi A là biến cố lấy ra 3 quả cầu trắng

P(A) = C3 = 1

5

C

3

12 22

1. Gọi B là biến cố lấy được 2 quả cùng màu.

Xác suất để 2 quả lấy ra cùng màu trắng là: C2.C1 = 7

C

3

5 7

12 22

Xác suất để 2 quả lấy ra cùng màu xanh là: C2.C1 =

C

3

3 9

12

27

220

Xác suất để 2 quả lấy ra cùng màu đen là: C2.C1 = 12

C

3

4 8

12 55

P(B)= 7

+ 27

+ 12 = 29

22 220 55 44

**Ví dụ 5** (Trịnh Quang Nam): Một sinh viên mới ra trường đồng thời nộp bốn hồ sơ xin việc cho bốn công ty, phỏng vấn trình độ và chờ kết quả. Cho biết xác suất để mỗi công ty nhận sinh viên đó vào thử việc tương ứng là 0,2; 0,35; 0,5 và 0,65. Tính xác suất của sự kiện “có ít nhất một vông ty nhận sinh viên đó vào thử việc đồng thời công ty thứ ba không nhận sinh viên đó”.

**Giải**

Ai: “Công ty thứ i nhận cử nhân đó vào thử việc”

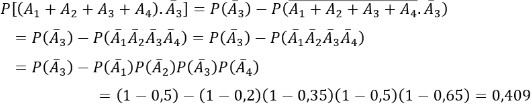
Theo bài, có thể giả định A1, A2, A3, A4 độc lập toàn phần. Ta có: P(A1) = 0,2; P(A2) = 0,35; P(A3) = 0,5; P(A4) = 0,65

A1+A2+A3+A4 có it

nhất 1 công ty nhân

cử nhân vào thử viêc

xác suất cần tính là:



**Ví dụ 6** (Tạ Phương Linh): Có 2 hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 3 quả cầu xanh. 4 quả cầu đỗ, hộp thứ hai chứa 5 quả cầu xanh và 4 quả cầu đó. Lấy một hộp 1 quả cầu. Tính xác suất để lấy được hai quả cầu xanh.

#### Giải

Gọi A là biến có “lấy được quả cầu xanh ở hợp thứ nhất" B là biển cố “lấy được quả cầu xanh ở hợp thứ hai".

ta có P(A) =3

7

và P(B)= 5

9

Kết quả việc lấy quả cầu ở hộp thứ nhất không ảnh hưởng đến kết quả lấy quả cầu ở hộp thứ hai và ngược lại nên A và B là hai biến cố độc lập.

P(A.B)=P(A).P(B)= 3 . 5 = 5

7 9 21

**Ví dụ 7** (Tạ Phương Linh): Bạn Mạnh có 10 bông hoa hồng; 8 bông hoa lan và 9 bông hoa ly. Bạn Mạnh định chọn 7 bông hoa để đi tặng bạn. Tính xác suất để 7 bông hoa đó cùng loại.

#### Giải

+ Gọi A là biến cố bạn Mạnh chọn 7 bông hoa hồng.

+ Gọi B là biến cố bạn Mạnh chọn 7 bông hoa lan.

+ Gọi C là biến cố bạn Mạnh chọn 7 bông hoa ly.

⇒ A𝖴B𝖴C: bạn Mạnh chọn 7 bông hoa cùng loại. Các biến cô A; B; C đôi một xung khắc.

C7 C7 C7

Ta có: P(A)= 10 ; P(B)= 8 ;P(C)= 9

7 7 7

C

C

C

27 27 27

7 7 7

C +C +C

P(A𝖴B𝖴C)=P(A)+P(B)+P(C)= 10 8 9=

C

7

27

82

444015

**Ví dụ 8** (Tạ Phương Linh): Trường THPT A có 270 học sinh khối 10; 300 học sinh khối 11 và 280 học sinh khối 12. Nhà trường chọn 1 học sinh bất kì. Tính xác suất để học sinh đó không phải là học sinh khối 12.

#### Giải

+ Trường THPT A có tất cả: 270+ 300+ 280= 850 học sinh.

+ Gọi A là biến cố chọn được 1 học sinh khối 10. B là biến cố chọn được 1 học sinh khối 11.

⇒ A𝖴B là học sinh được chọn không phải là khối 12.

Ta có: P(A)= 270= 27

850 85

P(B)= 300= 30

850 85

Do hai biến cố A và B xung khắc nên ta có:

P(A𝖴B)= P(A) + P(B)= 27+ 30= 57

85 85 85

**Ví dụ 9** (Tạ Phương Linh): Lớp có 100 Sinh viên, trong đó có 50 SV giỏi Anh Văn, 45 SV giỏi Pháp Văn, 10SV giỏi cả hai ngoại ngữ. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp. Tính xác suất:

* 1. Sinh viên này giỏi ít nhất một ngoại ngữ.
  2. Sinh viên này không giỏi ngoại ngữ nào hết.

**Giải**

1. Gọi A là biến cố Sinh viên giỏi Anh Văn. Gọi B là biến cố Sinh viên giỏi Pháp Văn.

Gọi C là biến cố Sinh viên giỏi ít nhất một ngoại ngữ.

P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)= 50

100

+ 45

100

− 10

100

= 0,85

1. Gọi D là biến cố Sinh viên này không giỏi ngoại ngữ nào hết.

P(D)=1-P(C) =1-0.85=0,15

**Ví dụ 10** (Tạ Phương Linh): Có hai lớp 10A và 10 B mỗi lớp có 45 học sinh, số học sinh giỏi văn và số học sinh giỏi toán được cho trong bảng sau. Có một đoàn thanh tra. Hiệu trưởng nên mời vào lớpnào để khả năng gặp được một em giỏi ít nhất một môn là cao nhất?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Lớp* | *10A* | *10B* |
| *giỏi* |
| *Văn* | *25* | *25* |
| *Toán* | *30* | *30* |
| *Văn và*  *Toán* | *20* | *10* |

**Giải**

Gọi V là biến cố học sinh giỏi Văn, T là biến cố học sinh giỏi Toán. Ta có: Lớp 10A:

P(V+T)=P(V)+P(T)-P(VT)= 25 + 30 − 20 = 7

Lớp 10B :

45 45 45 9

P(V+T)=P(V)+P(T)-P(VT)= 25 + 30 − 10 = 1

Vậy nên chọn lớp 10 B

45 45 45

#### CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐẦY ĐỦ - CÔNG THỨC BAYES

#### CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐẦY ĐỦ

**Ví dụ 1**(Hà Bích Ngọc): Có ba hộp đựng phiếu thi, mỗi phiếu có một câu hỏi. Hộp một có 10 phiếu, hộp hai có 8 phiếu và hộp ba có 7 phiếu. Một học sinh đi thi thuộc 8 câu ở hộp một, 6 câu ở hộp hai, 5 câu ở hộp ba. Thầy giáo lấy ngẫu nhiên 2 câu ở hộp một, 1 câu ở hộp hai chuyển sang hộp ba sau đó cho học sinh lấy ngẫu nhiên 1 câu ở hộp ba. Tìm xác suất để học sinh trả lời được câu hỏi thi.

#### Giải:

Gọi *A* là biến cố “ Học sinh trả lời được câu hỏi thi”.

Gọi

*A*1 là biến cố “ Lấy được 2 câu thuộc của hộp một và 1 câu thuộc ở hộp hai

chuyển sang hộp thứ ba”

Gọi *A*2 là biến cố “ Lấy được 2 câu thuộc ở hộp một và 1 câu không thuộc ở hộp hai

chuyển sang hộp ba”

Gọi

*A*3 là biến cố “ Lấy được 1 câu thuộc, 1 câu không thuộc ở hộp một và 1 câu

thuộc ở hộp hai chuyển sang hộp ba”

Gọi *A*4 là biến cố “ Lấy được 1 câu thuộc, 1 câu không thuộc ở hộp một và 1 câu

không thuộc ở hộp hai chuyển sang hộp ba”

Gọi *A*5 là biến cố “ Lấy 2 câu không thuộc ở hộp một và 1 câu thuộc ở hộp hai

chuyển sang hộp ba”

Gọi *A*6 là biến cố “ Lấy 2 câu không thuộc ở hộp một và 1 câu không thuộc ở hộp hai

chuyển sang hộp ba”

*C*2 *C*1

168

*C*2 *C*1 56

*C*1.*C*1 *C*1 96

*P*( *A*1 )  8 . 6  ;

*P*( *A*2 )  8 . 2  ;

*P*( *A*3 )  8 2 . 6 

*C*2 *C*1

360

*C*2 *C*1

360

*C*2 *C*1

360

10 8

10 8

10 8

*C*1.*C*1 *C*1 32

*C*2 *C*1 6

*C*2 *C*1 2

*P*( *A*4 )  8 2 . 2  ;

*P*( *A*5 )  2 . 6  ;

*P*( *A*6 )  2 . 2 

*C*2 *C*1

360

*C*2 *C*1

360

*C*2 *C*1

360

10 8

10 8

10 8

Khi đó

*A*1, *A*2 , *A*3 , *A*4 , *A*5 , *A*6

là nhóm biến cố đầy đủ và *A* xảy ra khi một trong các biến cố

*Ai* xảy ra.

*P*( *A* / *A* ) 

8 ; *P*( *A* / *A* )  *P*( *A* / *A* ) 

7 ; *P*( *A* / *A* )  *P*( *A* / *A* ) 

6 ;*P*( *A* / *A* )  5

1 10

2 3 10

4 5 10

6 10

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta có:

*P*( *A*)   *P*( *A* )*P*( *A* / *A* )  1974  987 .

6

*i*1

*i i* 3600 1800

Vậy xác suất để học sinh trả lời được câu hỏi thi là 987 .

1800

**Ví dụ 2**(Hà Bích Ngọc): Kiện hàng 1 có 5 sản phẩm loại A, 1 sản phẩm loại B. Kiện hàng 2 có 2 sản phẩm loại A, 4 sản phẩm loại B. Từ mỗi kiện lấy ngẫu nhiên ra 1 sản phẩm đem giao cho khách hàng. Sau đó các sản phẩm còn lại được dồn chung vào kiện thứ 3 (kiện này đang còn trống). Nếu ta lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ kiện hàng 3 thì xác suất để chọn được sản phẩm loại B là bao nhiêu?

#### Giải:

Gọi

*A*1 : Lấy 1 sp loại A từ kiện 1 và 1 sp loại A từ kiện 2 giao cho khách hàng *A*2 : Lấy 1 sp loại A từ kiện 1 và 1 sp loại B từ kiện 2 giao cho khách hàng *A*3 : Lấy 1 sp loại B từ kiện 1 và 1 sp loại A từ kiện 2 giao cho khách hàng *A*4 : Lấy 1 sp loại B từ kiện 1 và 1 sp loại B từ kiện 2 giao cho khách hàng *A* : SP lấy từ kiện 3 là loại B

4

{*A* }

*i i* 1

là hệ đầy đủ. Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta có:

4

*P*( *A*)   *P*( *Ai* ).*P*( *A* / *Ai* )

*i*1

với

4

*P*( *A*)   *P*( *Ai* ).*P*( *A* / *Ai* )

*i*1

*P*( *A* )  5 2 5 5 4 4

1 . ; *P*( *A* / *A*1 )  ; *P*( *A*2 )  . ; *P*( *A* / *A*2 ) 

6 6 10 6 6 10

*P*( *A* )  1 2 4 1 4 3

3 . ; *P*( *A* / *A*3 )  ; *P*( *A*4 )  . ; *P*( *A* / *A*4 ) 

6 6 10 6 6 10

*P*( *A*)   *P*( *A* ).*P*( *A* / *A* )  15 .

4

*i*1

*i i* 36

15

Vậy xác suất để chọn được sản phẩm loại B là

36 .

**Ví dụ 3(**Hà Bích Ngọc): Ba công nhân cùng sản xuất một loại sản phẩm, xác suất làm ra phế phẩm của công nhân thứ nhất bằng xác suất làm ra phế phẩm của công nhân thứ hai và bằng 0,1. Còn xác suất làm ra phế phẩm của công nhân thứ 3 là 0,2. Chọn ngẫu nhiên một công nhân và cho người đó sản xuất 8 sản phẩm. Tìm xác suất để trong 8 sản phẩm có 2 sản phẩm là phế phẩm.

#### Giải:

Gọi

{*A* }3

*Ai* : Công nhân thứ i được chọn (*i*  1, 3)

*A* : 8 sản phẩm sản xuất ra có 2 phế phẩm

là hệ đầy đủ. Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta có:

*i i* 1

3

*P*( *A*)   *P*( *Ai* ).*P*( *A* / *Ai* ) với:

*i*1

*P*( *A* )  *P*( *A* )  *P*( *A* )  1 ; *P*( *A* / *A* )  *P*( *A* / *A* )  *P* (2;0,1)  0,1488

1 2 3 3

1 2 8

*P*( *A* / *A*3 )  *P*8 (2;0, 2)  0, 2936 .

 *P*( *A*)  0,1971

Vậy xác suất để trong 8 sản phẩm có 2 phế phẩm là 0,1917.

**Ví dụ 4**(Hà Bích Ngọc): Có hai hộp sản phẩm, hộp I dựng 10 sản phẩm tốt và 5 sản phẩm xấu, hộp II đựng 8 sản phẩm tốt và 1 sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm ở hộp I bỏ sang hộp II, sau đó lấy ngẫu nhiên ra 1 sản phẩm ở hộp II. Tìm xác suất để sản phẩm lấy ra sau cùng là sản phẩm tốt.

#### Giải:

Gọi 𝐴1 là biến cố “lấy được sản phẩm tốt ở hộp I bỏ sang hộp II”.

𝐴2 là biến cố “lấy được sản phẩm xấu ở hộp I bỏ sang hộp II”. A là biến cố “sản phẩm lấy ra sau cùng là sản phẩm tốt”.

Khi đó 𝐴1, 𝐴2 là nhóm biến cố đầy đủ và A xảy ra khi 𝐴1 xảy ra hoặc 𝐴2 xảy ra. Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta có

Trong đó:

2

𝑃(𝐴) = ∑ 𝑃(𝐴𝑖)𝑃(𝐴/𝐴𝑖) = 𝑃(𝐴1)𝑃(𝐴/𝐴1) + 𝑃(𝐴2)𝑃(𝐴/𝐴2)

𝑖=1

*P(*𝐴1

) = 2

3

*; P(*𝐴2

)*=*1 *;*

3

*P(A/*𝐴1

*)=* 9

10

*; P(A/*𝐴2

*)=* 4

5

Khi đó: *P(A) =* 13

15

Vậy xác suất để sản phẩm lấy ra sau cùng là sản phẩm tốt là 13

15

**Ví dụ 5** (Hà Bích Ngọc): Tan giờ học buổi chiều một sinh viên có 60% về nhà ngay, nhưng do giờ cao điểm nên có 30% ngày bị tắc đường nên bị về nhà muộn (từ 30 phút trở lên) còn 20% số ngày sinh viên đó vào quán Internet cạnh trường để chơi Games, những ngày này xác suất về nhà muộn là 80%. Còn lại những ngày khác sinh viên đó đi chơi với bạn bè có xác suất về muộn là 90%. Tính xác suất để trong một ngày nào đó sinh viên không về muộn.

**Giải**

Gọi *A* là biến cố “sinh viên đó đi học về muộn”.

Thì 𝐴 là biến cố “sinh viên đó đi học không về muộn”

𝐴1là biến cố “tan học về nhà ngay” ⇒ 𝑃(𝐴1) = 0,6; 𝑃(𝐴/𝐴1) = 0,3

𝐴2là biến cố “tan học đi chơi game” ⇒ 𝑃(𝐴2) = 0,2; 𝑃(𝐴/𝐴2) = 0,8

𝐴3là biến cố “tan học về đi chơi với bạn”⇒ 𝑃(𝐴) = 0,2; 𝑃(𝐴/𝐴3) = 0,9

Nên *A* có thể xảy ra một trong 3 biến cố nên ta có:

3

𝐴 𝐴 𝐴 𝐴

𝑃(𝐴) = ∑ 𝑃(𝐴𝑖)𝑃 (𝐴 ) = 𝑃(𝐴1)𝑃 (𝐴 ) + 𝑃(𝐴2)𝑃 (𝐴 ) + 𝑃(𝐴3)𝑃 (𝐴 )

= 0,529

𝑖=1 𝑖

1 2 3

⇒ 𝑃(𝐴) = 1 − 0,52 = 0,48

Vậy xác suất để trong một ngày nào đó sinh viên không về muộn là 0,48.

**Ví dụ 6** (Nguyễn Thị Thúy Dân): Có 2 lô sản phẩm. Lô 1 có 50 sản phẩm trong đó có 20 sản phẩm xấu. Lô 2 có 40 sản phẩm, trong đó có 15 sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên 1 lô và từ đó lấy ra 1 sản phẩm. Tìm xác suất để sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt.

#### Giải

Gọi 𝐴𝑖 là biến cố chọn ra lô sản phẩm. (i = 1,2) Gọi A là biến cố lấy ra sản phẩm tốt.

Ta có 𝐴1, 𝐴2 là nhóm biến cố đầy đủ, A xảy ra khi 𝐴1 ℎ𝑜ặ𝑐 𝐴2 xảy ra. Theo công thức xác suất toàn phần :

P(A) = ∑𝑛 𝑃(𝐴𝑖) ⋅ 𝑃(𝐴 ∕ 𝐴𝑖) = 𝑃(𝐴1)𝑃(𝐴 ∕ 𝐴1) + 𝑃(𝐴2)𝑃(𝐴 ∕ 𝐴2)

𝑖=1

= 1 ⋅ 30 + 1 ⋅ 25 = 49

2 50 2 40 80

**Ví dụ 7** (Nguyễn Thị Thúy Dân): Có hai cái hộp. Hộp thứ nhất có 4 bi trắng và 5 bi đen. Hộp thứ hai có 5 bi trắng và 4 bi đen. Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi ở hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai rồi sau đó chọn ngẫu nhiên một viên bi ở hộp thứ hai ra. Tính xác suất để lấy được bi trắng từ hộp thứ hai.

#### Giải

Gọi A là biến cố: “Lấy được bi trắng từ hộp thứ hai”, Ai là biến cố: “Trong 3 viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất có i bi trắng”, i=0,1,2,3.

Khi đó { 𝐴0, 𝐴1, 𝐴2, 𝐴3} là hệ đầy đủ các biến cố và ta có:

P(𝐴0) =

𝐶 3

𝐶3

5

9

= 10 ;

84

𝐶 1 . 𝐶2

P( = 4 5

𝐴1)

𝐶3

9

= 40 ;

84

P(𝐴2) =

𝐶 2 . 𝐶1

𝐶3

9

4 5

= 30 ;

84

P(𝐴3) =

𝐶 3 = 4 .

𝐶3 84

4

9

Theo công thức xác suất đầy đủ:

P(A) = ∑𝑛 𝑃(𝐴𝑖) ⋅ 𝑃(𝐴 ∕ 𝐴𝑖) = 𝑃(𝐴0)𝑃(𝐴 ∕ 𝐴0) + 𝑃(𝐴1)𝑃(𝐴 ∕ 𝐴1)

𝑖=1

𝑃(𝐴2)𝑃(𝐴 ∕ 𝐴2) + 𝑃(𝐴3)𝑃(𝐴 ∕ 𝐴3)

= 10 ⋅ 5

+ 40 ⋅ 6

+30 ⋅ 7

+ 4 ⋅ 8

84 12

= 19

36

84 12

84 12

84 12

Vậy xác suất cần tìm là 19/36.

**Ví dụ 8** (Nguyễn Thị Thúy Dân): Xét một lô giày chiễn sĩ được sản xuất bởi 3 nhà may svoiws tỉ lệ lần lượt là 20%, 30% và 50%. Xác suất giày hỏng của 3 nhà máy lần lượt là 0,001; 0,005 và 0,006. Lấy ngẫu nhiên 1 chiếc giày từ lô hàng. Tìm xác suất chiếc giày lấy ra bị hỏng.

#### Giải

Gọi A là sự kiện “lấy được giày hỏng”.

𝐴𝑖 là sự kiện “lấy được giày của nhà máy i” (i=1,2,3). Ta có {𝐴1, 𝐴2, 𝐴3} là hệ đầy đủ. Theo công thức xác suất đầy đủ , ta có:

P(A) = 𝑃(𝐴1)𝑃(𝐴 ∕ 𝐴1) 𝑃(𝐴2)𝑃(𝐴 ∕ 𝐴2) + 𝑃(𝐴3)𝑃(𝐴 ∕ 𝐴3)

= 0,2 . 0,001 + 0,3 . 0,005 + 0,5 . 0,006

= 0,0065

Vậy xác suất chiếc giày lấy ra bị hỏng là 0.0065.

**Ví dụ 9** (Nguyễn Thị Thúy Dân): Có 2 hộp bi, Hộp 1 có 6 bi đen và 4 bi trắng. Hộp 2 có 7 bi đen và 3 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp 1 bỏ vào hộp 2 rôi từ hộp 2 lấy ngẫu nhiên ra 2 viên bi. Tìm xác suất để 2 viên bi lấy ra cùng màu.

#### Giải

Gọi A là biến cố lấy 2 bi đen ở hộp 2.

𝐴1 là biến cố lấy từ hộp 1 sang hộp 2 là bi đen.

𝐴2 là biến cố lấy từ hộp 1 sang hộp 2 là bi trắng.

𝐴3 là biến cố lấy từ hộp 1 sang hộp 2 là 1 bi đen và 1 bi trắng.

Ta có {𝐴1, 𝐴2, 𝐴3} là hệ đầy đủ. Theo công thức xác suất đầy đủ , ta có: P(A) = 𝑃(𝐴1)𝑃(𝐴 ∕ 𝐴1) 𝑃(𝐴2)𝑃(𝐴 ∕ 𝐴2) + 𝑃(𝐴3)𝑃(𝐴 ∕ 𝐴3)

𝐶2

𝐶2+ 𝐶2 𝐶2

𝐶2+ 𝐶2

𝐶1 . 𝐶1

𝐶2+ 𝐶2

= 6 . 9 3 + 4

𝐶

𝐶

𝐶

. 7 5

+ 6 4 . 8 4

2 2

𝐶

𝐶

𝐶

10 13

2 2

10 12

2 2

10 12

= 1 ⋅ 13

+ 2 ⋅ 31 + 8

⋅ 17 = 0,5343

3 22

15 66

15 33

Vậy xác suất cần tìm là 0,5343.

**Ví dụ 10** (Nguyễn Thị Thúy Dân): Một máy bay bắn độc lập 2 quả tên lửa vào 1 mục tiêu. Xác suất quả thứ nhất và quả thứ 2 bắn trúng làn lượt là 0,6 và 0,7. Nếu có 1 quả trúng thì mục tiêu bị tiêu diệt với xác suất 0,7 và nếu có 2 quả trúng thì xác suất này là 0,9. Tính xác suất mục tiêu bị tiêu diệt.

#### Giải:

Gọi Ai là biến cố có I quả tên lửa bắn trúng mục tiêu(i=0, 1, 2 ) A là biến cố mục tiêu bị tiêu diệt.

{𝐴0, 𝐴1, 𝐴2} là hệ đầy đủ. Theo công thức xác suất đầy đủ , ta có:

P(A) = 𝑃(𝐴0)𝑃(𝐴⁄𝐴0) + 𝑃(𝐴1)𝑃(𝐴⁄𝐴1) + 𝑃(𝐴2)𝑃(𝐴⁄𝐴2)

= 0,12 . 0 + 0,46 . 0,7 + 0,42 . 0,9

= 0,7

Vậy xác suất mục tiêu bị tiêu diệt là 0,7.

#### CÔNG THỨC BAYES

**Ví dụ 1** (Phạm Quang Kiên): Một mạch điện gồm 2 bộ phận mắc nối tiếp, với xác suâ't làm việc tốt trong một khoảng thòi gian nào đó của mỗi bộ phận là 0,95 và 0,98. ở một thời điểm trong khoảng thời gian trên người ta thấy mạch điện ngừng làm việc (do bộ phận nào đó hỏng); tìm xác suất để chỉ bộ phận thứ hai hỏng.

#### Giải

Gọi Ai (i = 1 , 2) là sự kiện bộ phận thứ i tốt B0 là biến cố cả hai bộ phận đều tốt;

B1 là biến cố bộ phận I tôt, II hỏng;

B2 là biến cố bộ phận II tốt, I hỏng;

B3 là biến cố cả hai bộ phận đều hỏng.

Dễ thấy các Bi, i =O̅̅̅,̅3̅, tạo nên một nhóm đầy đủ và do tính độc lập

P(B0) = P(A1,A2) = 0,95.0,98 = 0,931; P(B1)= P(A1,𝐴̅̅2̅) = 0,95.0,02 = 0,019; P(B2) = P(̅𝐴̅1̅,A2) = 0,05.0,98 = 0,049; P(B3) = P(𝐴̅̅1̅,𝐴̅̅2̅)= 0,05.0,02 = 0,001.

Gọi H là biến cố mạch không làm việc, ta có: P(H/B0)= 0; P(H/B1) = P(H/2) = P(H/3) = 1 .

Từ đó theo công thức Bayes:

P(B1/H)= 𝑃(𝐵1)𝑃(𝐻/𝐵1) = 0,019 = 19

3

∑

𝑖=0

𝑃(𝐵𝑖)𝑃(𝐻/𝐵𝑖)

0,019+0,049+0,001 69

**Ví dụ 2** (Phạm Quang Kiên): Tại một phòng khám chuyên khoa tỷ lệ ngưòi đến khám có bệnh là 83%. Theo thông kê biết rằng nếu chẩn đoán có bệnh thì đúng tới 90%, còn nếu chẩn đoán không bệnh thì chỉ đúng 80%. Biết có một trường hợp chẩn đoán đúng; tìm xác suất ngưồi đươc chẩn đoán đúng có bệnh.

#### Giải

Gọi H là biến cố chuẩn đoán đúng

A là biến cố người đến khám có bệnh B là biến cố chuẩn đoán bệnh

P(A) = 0,83 ; P(A|B) =P(H|B)= 0,9 ; P(A|𝐵) = 𝑃(𝐻|𝐵) = 1 − 𝑃(𝐻|𝐵) = 1 − 0,8 = 0,2

Ta có : 𝑃(𝐴) = 𝑃(𝐴|𝐵). 𝑃(𝐵) + P(A|𝐵).P(𝐵)

 0,83=0,9.P(B)+ 0,2.(1 – P(B)) => P(B) = 0,9.

P(H) = P(B)P(H|B) + P(𝐵)P{H|𝐵).

 P(H) = 0,9.0,9 + 0,1.0,8 = 0,89.

Xác suất cần tìm là P(A|H)

Theo công thức Bayes có :

P(A|H) = 𝑃(𝐴).𝑃(𝐻|𝐴)

𝑃(𝐻)

Mà P(H|A) = P(B|A) = 𝑃(𝐵).𝑃(𝐴|𝐵)

𝑃(𝐴)

Từ đó thay vào công thức trên :

P(A|H) = 𝑃(𝐵).𝑃(𝐴|𝐵) = 0,9.0,9 ≈ 0,91

𝑃(𝐻) 0,89

**Ví dụ 3** (Phạm Quang Kiên): Có hai lô sản phẩm,lô thứ nhất có tỷ lệ chính phẩm là 3,

4

còn lỗ thứ 2 có tỷ lệ chính phẩm là 2. Lấy ngẫu nhiên một lô và từ đó lấy ngẫu nhiên

3

một sản phẩm thấy nó là chính phẩm. Sản phẩm được bỏ trở lại và từ lô đó lấy tiếp một sản phẩm. Tìm xác suất để lần thứ hai cũng lấy được chính phẩm.

#### Giải

Gọi A là biến cố sản phẩm lấy lần đầu là chính phẩm.\ Hi là biến cố sản phẩm được lấy ra từ lô thứ i (i= 1;2)

H1 , H2 là hệ biến cố đầy đủ , A xảy ra khi và chỉ khi H1 xảy ra hoặc H2 xảy ra.

P(A|H1) = 3 ; P(A|H2)= 2

4 3

P(H1) = P(H2)= 1

2

P(A) = P(H ).P(A|H ) + P(H ).P(A|H ) = 1 3 1 2 17

1 1 2

2 2 . 4 + 2 . 3 = 24

Áp dụng công thức Bayes:

𝑃(𝐻1

𝑃(𝐻2

|𝐴) = 𝑃(𝐻1). 𝑃(𝐴|𝐻1) =

𝑃(𝐴)

|𝐴) = 𝑃(𝐻2). 𝑃(𝐴|𝐻2) =

𝑃(𝐴)

3 24 9

. =

8 17 17

1 24 8

. =

3 17 17

Gọi B là biến cố sản phẩm lấy lần thứ hai là chính phẩm. B xảy ra khi H1 xảy ra hoặc H2 xảy ra.

P(B/H1A) = 3 ; P(B/H2A)= 2

4 3

P(B) = P(H /A).P(B/H A) + P(H B).P(B/H A) = 9 3 8 2

145

1 1 2

2 17 . 4

+ . =

17 3

204

**Ví dụ 4** (Phạm Quang Kiên): Có hai xạ thủ , xác suất bắn trúng đích của các xạ thủ tương ứng là 0,6; 0,7. Gọi ngẫu nhiên ra 1 xạ thủ và xạ thủ đó bắn ngẫu nhiên hai viên đạn thấy cả hai viên đều trúng đích. Nếu xạ thủ đó bắn tiếp hai viên nữa thì khả năng có một viên trúng đích là bao nhiêu?

#### Giải

Gọi Hi là biến cố gọi ra xạ thủ i (i= 1;2)

A là biến cố xạ thủ được gọi bắn hai viên đạn thấy cả hai viên đều trúng đích.

H1, H2 là hệ biến cố đầy đủ . A xảy ra khi và chỉ khi H1 xảy ra hoặc H2 xảy ra Ta có P(H1) = P(H2) = 0,5

P(A/H1)=(0,6)2 ;P(A/H2)= (0,7)2

Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có: P(A)= 0,5. (0,6)2 + 0,5. (0,7)2= 0,425

Theo công thức Bayes:

P(H |A)= 0,5.(0,6)2 = 0,423529

1 0,425

P(H |A)= 0,5.(0,7)2 = 0,576471

2 0,425

Gọi B là biến cố xạ thủ được gọi bắn tiếp hai viên đạn nữa thấy có một viên trúng đích.

Biến cố B co thể xảy ra đồng thời với một trong hai biến cố (H1|A), (H2|A) P(B/H1A)= 𝐶1. 0,6.0,4 = 0,48

2

P(B/H2A)= 𝐶1. 0,7.0,3 = 0,42

2

Theo công thức xác suất đầy đủ

2

𝑃(𝐵) = ∑ 𝑃(𝐻𝑖|𝐴)𝑃(𝐵|𝐻𝑖𝐴) = 0,423529.0,48 + 0,576471.0,42 = 0,44541176

𝑖=1

**Ví dụ 5** (Phạm Quang Kiên): Trong một bệnh viện, tỷ lệ bệnh nhân mắc bệnh A là 35%, tỷ lệ bệnh nhân mắc bệnh B là 45% và tỷ lệ bệnh nhân mắc bệnh C là 20%. Khả

năng bệnh viện chữa khỏi các bệnh A,B,C tương ứng là 60%, 70% và 90%. Hãy tìm tỷ lệ bệnh nhân được chữa khỏi bệnh A trong số các bệnh nhân đã được chữa khỏi bệnh.

#### Giải

Gọi D là biến cố bệnh nhân được chữa khỏi bệnh H1 là biến cố bệnh nhân mắc bệnh A

H2 là biến cố bệnh nhân mắc bệnh B H3 là biến cố bệnh nhân mắc bệnh C

H1,H2,H3 là hệ biến cố đầy đủ và biến cố D xảy ra khi và chỉ khi H1 xảy ra hoặc H2 xảy ra hoặc H3 xảy ra

P(H1)=0,35 ; P(H2)= 0,45 ; P(H3) = 0,2

P(D/H1)=0,6 ; P(D/H2)=0,7 ; P(D/H3)=0,9

Theo công thức Bayes ta có

P(H1|D)= 𝑃(𝐻1).𝑃(𝐷|𝐻1) = 0,35.0,6

= 0,297872

3

∑

𝑖=1

𝑃(𝐻𝑖).𝑃(𝐷|𝐻𝑖)

0,35.0,6+0,45.0,7+0,2.0,9

Vậy trong số các bệnh nhân đã được chữa khỏi bệnh có 29,7872% bệnh nhân đã được chữa khỏi bệnh A.

**Ví dụ 6** (Trương Thị Bích): Một nhà máy sản xuất bóng đèn gồm 3 máy. Máy A sản xuất 25%, máy B: 35%, máy C: 40% số bóng đèn. Tỉ lệ sản phẩm hỏng của mỗi máy trên số sản phẩm do máy đó sản xuất lần lượt là 3%, 2%, 1%. Một người mua bóng đèn do nhà máy đó sản xuất

Tính xác suất để sản phẩm này do máy A sản xuất Tính xác suất để sản phẩm này tốt

Biêt sản phẩm này là xấu. Tính xác xuất để sản phẩm do máy C sản xuất

#### Giải

1. Gọi A là biến cố sản phẩm được mua do máy A sản xuất Ta có: P(A) = 0,25

Vì máy A sản suất 25% sản phẩm của nhà máy.

1. Gọi 𝐻1 là biến cố sản phẩm được mua do máy A sản suất

𝐻2 là biến cố sẩn phẩm được mua do máy B sản xuất

𝐻3 là biến cố sẩn phẩm được mua do máy C sản xuất Ta có:

P(B) = P(𝐻1).P(B/𝐻1) + P(𝐻2). P(B/𝐻2) + P(𝐻3). P(𝐵/𝐻3)

= 0,25.0,03 + 0,35.0,02 + 0,4.0,01 = 0,0185

1. Xác suất của biến cố cần tính là:

P(𝐻

/𝐵) = P(𝐻3)P(𝐵/𝐻3)

3 P(𝐻 )P(𝐵 )+ P(𝐻 )P(𝐵 )+ P(𝐻 )P(𝐵/𝐻 )

1 𝐻1 2 𝐻2 3 3

8

## =

37

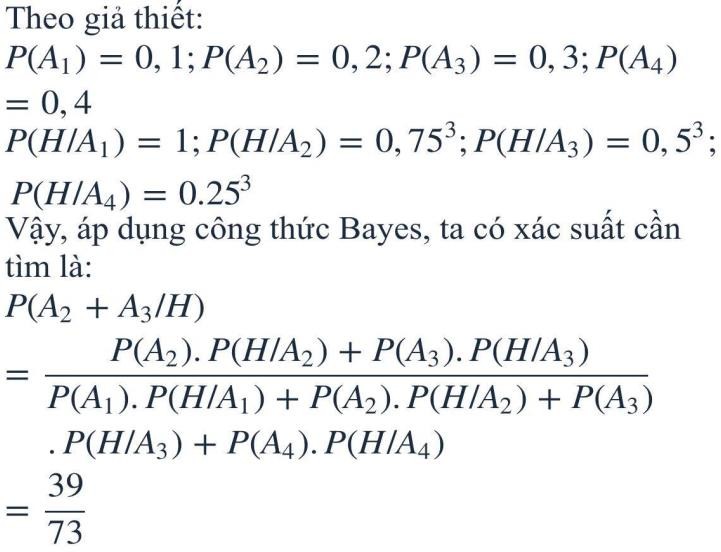
**Ví dụ 7** (Trương Thị Bích): Một đề thi có 20 câu hỏi. Sinh viên giỏi sẽ trả lời đúng hết cả 20 câu. Sinh viên khá trả lời đúng 15 câu, sinh viên trung bình trả lời đúng 10 câu, yếu 5 câu. Tỷ lệ sinh viên giỏi, khá, trung bình, yếu lần lượt là 10%, 20%, 30%, 40%. Một sinh viên lên bốc thăm 3 câu từ 20 câu trên. Giám khảo thấy anh trả lời đúng cả 3 câu. Tính xác suất anh ta là sinh viên khá hoặc trung bình.

#### Giải

Đặt H: " Sinh viên được chọn trả lời đúng 3 câu" A1: "Sinh viên được chọn là sinh viên giỏi." A2: "Sinh viên được chọn là sinh viên khá."

A3: "Sinh viên được chọn là sinh viên trung bình." A4: "Sinh viên được chọn là sinh viên yếu."

{A1,A2,A3,A4) là nhóm đầy đủ biến cố.



**Ví dụ 8** (Trương Thị Bích): Một đề thi có 20 câu hỏi. Sinh viên giỏi sẽ trả lời đúng hết cả 20 câu. Sinh viên khá trả lời đúng 15 câu, sinh viên trung bình trả lời đúng 10 câu, yếu 5 câu. Tỷ lệ sinh viên giỏi, khá, trung bình, yếu lần lượt là 10%, 20%, 30%, 40%.

Một sinh viên lên bốc thăm 3 câu từ 20 câu trên. Giám khảo thấy anh trả lời đúng cả 3 câu. Tính xác suất anh ta là sinh viên khá hoặc trung bình.

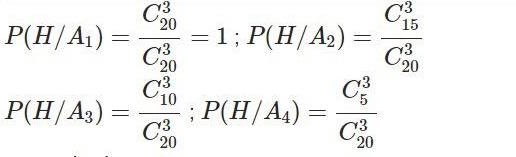
#### Giải

Gọi H là biến cố “sinh viên trả lời đúng”

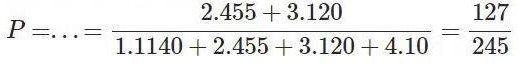
𝐴1 là biến cố “sinh viên giỏi”

𝐴2 là biến cố “sinh viên khá”

𝐴3 là biến cố “sinh viên trung bình” Trong đó:



Vậy xác suất cần tìm là



**Ví dụ 9** (Trương Thị Bích): Dây chuyền lắp ráp máy vô tuyến điện gồm các linh kiện là sản phẩm từ 2 nhà máy sản xuất ra. Số linh kiện nhà máy 1 sản xuất chiếm 55%, sổ linh kiện nhà máy 2 sản xuất chiếm 45%; tỷ lệ sản phẩm đạt tiêu chuẩn của nhà máy 1 là 90%, nhà máy 2 là 87%. Lấy ngẫu nhiên ra 1 linh kiện từ dây chuyền lắp ráp đó ra kiểm tra thì được kết quả linh kiện đạt chuẩn. Tìm xác suất để linh kiện đó do nhà máy 1 sản xuất?

#### Giải

Gọi A là biến cố “linh kiện do nhà máy thứ i sản xuất”, i=(1, 2). Gọi B = “linh kiện đạt chuẩn”, ta cần tìm P(𝐴1/ B).

Ta có:

P(B) = P(𝐴1)P(B/𝐴1) + P(A2)P(B/A2) = 0,55.0,9 +0,45.0,87 = 0,8865.

P(A,B) =

P(𝐴1

B

)P( )

𝐴1

= (0,55.0,9) /0.8865= 0,5583.

P(B)

**Ví dụ 10** (Trương Thị Bích): Dây chuyền lắp ráp nhận được các chi tiết do hai máy sản xuất. Trung bình máy thứ nhất cung cấp 60% chi tiết, máy thứ hai cung cấp 40% chi tiết. Khoảng 90% chi tiết do máy thứ nhất sản xuất là đạt tiêu chuẩn, còn 85% chi tiết do máy thứ hai sản xuất là đạt tiêu chuẩn. Lấy ngẫu nhiên từ dây chuyền một sản phẩm, thấy nó đạt tiêu chuẩn. Tìm xác suất để sản phẩm đó do máy thứ nhất sản xuất. **Giải**

Gọi A là biến cố: “Chi tiết lấy từ dây chuyền đạt tiêu chuẩn”

𝐵1 là biến cố: “Chi tiết do máy thứ nhất sản xuất”

𝐵2 là biến cố: “Chi tiết do máy thứ hai sản xuất". Ta cần tính xác suất P (𝐵1/A).

Theo công thức Bayes:

P(𝐵1/A) = P (𝐵1) P(A/𝐵1) / ( P(𝐵1) P (A/𝐵1) + P(𝐵2) P (A/𝐵2) ) Theo điều kiện bài toán:

P(𝐵1) = 0,6; P(𝐵2) = 0,4;

P(A/𝐵1) = 0,9;P(A/𝐵2) = 0,85.

Thay vào ta có:

P(𝐵1/A) = (0,6 x 0,9) / (0,6 x 0,9 +0,4 x 0,85) = 0,614.

#### CÔNG THỨC BERNOULLI

**Ví dụ 1** (Lê Văn Dương): Có một dịch bệnh ở một lớp học với tỉ lệ truyền nhiễm là 27%. Tiến hành xét nghiệm với 20 học sinh trong lớp.

1. Tính xác suất có đúng 3 học sinh nhiễm bệnh
2. Tính xác suất có số học sinh bị nhiễm ít hơn hoặc bằng 4

#### Giải:

**a**, Gọi A là biến cố “ có đúng 3 học sinh bị nhiễm bệnh”

Áp dụng công thức Bernoulli với n = 20, m = 3, p = 0.27 ta có:

𝑃20(𝐴) = 𝐶3 (0,27)3(0,73)17 = 0,10653

20

**b**, Gọi B là biến cố “có nhiều nhất 4 học sinh bị nhiễm bệnh ” Áp dụng công thức Bernoulli ta có:

4

𝑃(𝐵) = ∑𝑘=0 P20(k, 0.27) = 0,3375

**Ví dụ 2** (Lê Văn Dương): Sản phẩm X bán ra trên thị trường do 1 nhà máy sản xuất gồm 2 phân xưởng A và B có 95% là sản phẩm đạt tiêu chuẩn , trong đó phân xưởng A sản xuất 60%, phân xưởng B sản xuất 40%. Chọn mua ngẫu nhiên 120 sản phẩm

X. Tính xác suất để có 80 sản phẩm đạt tiêu chuẩn đến từ xưởng A

#### Giải

Gọi T là biến cố “ mua được sản phẩm đạt tiêu chuẩn” Có P(T) = 0.95

Gọi A là biến cố “ mua được 80 sản phẩm đạt tiêu chuẩn từ xưởng A” Áp dụng công thức Bernoulli với n = 120, m = 80, p = 0.6 ta có

𝑃120(𝐴) = 𝑃(𝑇). 𝑃120(80, 0.6) = 0,95. 𝐶80 . 0,680. 0.440 = 0,0235

120

**Ví dụ 3** (Lê Văn Dương): Một sinh viên thi trắc nghiệm môn Ngoại Ngữ gồm có 10 câu hỏi. Mỗi câu có 4 phần để lựa chọn trả lời, trong đó chỉ có 1 phần đúng. Giả sử sinh viên làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên các phần của câu hỏi. Tính xác suất trong các trường hợp sau:

1. Sinh viên vừa đủ 5 điểm
2. Sinh viên chọn đúng ít nhất 1 câu hỏi.

#### Giải

a, Gọi A là biến cố mà “sinh viên đó đạt 5 điểm”

Áp dụng công thức Bernoulli với n = 10, m = 5, p = 0,25 ta có

P10(A) = C5 . 0,255. 0,755 = 0,058399

10

b, Gọi B là biến cố mà “sinh viên đó chọn đúng ít nhất 1 câu” B’ là biến cố mà “sinh viên đó chọn không đúng câu nào”

Có P(B) = 1 – P(B’) (\*)

Áp dụng công thức Bernoulli ta có

P10(B′) = P10(0, 0.75) = 0,05631

Thay vào (\*) ta có P(B) = 0.94368

**Ví dụ 4** (Lê Văn Dương): Một bác sĩ có xác suất chẩn đoán đúng bệnh là 0,7. Có 5 người đến khám, tính xác suất để

* 1. Không ai được chẩn đoán đúng bệnh
  2. Có 4 người được chẩn đoán đúng bệnh

#### Giải:

a, Gọi A là biến cố không ai được chẩn đoán đúng bệnh Áp dụng công thức Bernoulli với n = 5, m = 0, p = 0.3 có

𝑃5(𝐴) = 𝐶0. 0,35. 0,70 = 0,00243

5

b, Gọi B là biến cố có 4 người được chẩn đoán đúng bệnh Áp dụng công thức Bernoulli với n = 5, m = 4, p = 0.7 có

𝑃5(𝐵) = 𝐶4. 0,74. 0,31 = 0,3610

5

**Ví dụ 5** (Lê Văn Dương): Từ một lô hàng có rất nhiều quyển vở với tỉ lệ bị lỗi là 5%, người ta chọn ngẫu nhiên từng quyển để kiểm tra. Giả sử việc kiểm tra sẽ dừng lại khi phát hiện 3 quyển vở hỏng. Tính xác suất để việc kiểm tra dừng lại ở lần thứ 10. **Giải:**

Gọi A là biến cố “ kiểm tra dừng lại ở lần thứ 10”

Kiểm tra dừng lại ở lần 10 suy ra 9 lần kiểm tra đầu phát hiện 2 quyển bị lỗi và lần 10 phải là quyển bị lỗi

𝑃(𝐴) = 𝑃9(2; 0,05). 0,05 = 𝐶2. 0,052. 0,957. 0,05 = 0,003143

9

# CHƯƠNG 2: ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN, QUY LUẬT PHÂN BỐ XÁC SUẤT

#### ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN

**Ví dụ 1**(Lê Văn Dương): Một người được phát 3 viên đạn và lần lượt bắn một tấm bia đến khi nào trúng thì dừng. Lập bảng phân phối xác suất số viên đạn phải bắn, biết rằng các lần bắn độc lập với nhau và xác suất trúng đích của mỗi lần bắn là 0,7.

#### Giải:

Gọi X là số lần bắn. X = {1, 2, 3}

Gọi A i là biến cố viên đạn thứ i trúng bia (i = 1,2,3) Ta có

𝑃(𝑋 = 1) = 𝑃(𝐴1) = 0,7

𝑃(𝑋 = 2) = 𝑃(̅𝐴̅1̅𝐴2) = (1 − 0,7). 0,7 = 0,21

𝑃(𝑋 = 3) = 𝑃(̅𝐴̅̅1̅𝐴̅̅2̅𝐴3) + 𝑃(𝐴̅̅1̅̅𝐴̅̅2̅𝐴̅̅3̅) = (1 − 0,7)2. 0,7 + (1 − 0,7)3 = 0,09

Lập bảng phân phối xác suất:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | *1* | *2* | *3* |
| *P* | *0,7* | *0,21* | *0,09* |

**Ví dụ 2**(Lê Văn Dương): Một thùng phiếu có 30 phiếu trong đó có 3 phiếu trúng thưởng. Một người bốc ngẫu nhiên 3 phiếu. Gọi X là số phiếu trúng thưởng mà người đó bốc được. Hãy lập bảng phân bố xác suất cho biến ngẫu nhiên X.

#### Giải:

Gọi X là số phiếu trúng thưởng, X = {0,1,2,3}

Biến cố X = 0 có nghĩa là trong 3 cả 3 vé đều không trúng, vậy

𝐶 3

27

𝑃(𝑋 = 0) = =

𝐶

3

30

585

812

Biến cố X =1 có nghĩa là trong 3 vé có 1 vé trúng và 2 vé không trúng, vậy

𝐶 1𝐶2

𝑃(𝑋 = 1) = 3 27 =

3

𝐶

30

1053

4060

Biến cố X = 2 có nghĩa là trong 3 vé có 2 vé trúng và 1 vé không trúng, vậy

𝐶 2𝐶1

𝑃(𝑋 = 2) = 3 27 =

3

𝐶

30

81

4060

Biến cố X = 3 có nghĩa là trong cả 3 vé đều được giải, vậy

𝐶3

3

𝑃(𝑋 = 3) = =

𝐶

3

30

1

4060

Bảng phân phối xác suất của X:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | *0* | *1* | *2* | *3* |
| *P* | *585/812* | *1053/4060* | *81/4060* | *1/4060* |

**Ví dụ 3**(Lê Văn Dương): Một nhóm có 7 người, trong đó gồm có 4 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 người. Gọi X là số nữ được chọn. Lập bảng phân phối xác suất .

#### Giải:

Gọi X là số nữ được chọn , x = {0,1,2,3}

Ta có

𝐶3 4

Biến cố X = 0 có nghĩa là 3 người được chọn đều nam, vậy 𝑃(𝑋 = 0) = 4

𝐶3

7

1 2

𝐶 𝐶

Biến cố X = 1 có nghĩa là chọn được 1 nữ và 2 nam, vậy 𝑃(𝑋 = 1) = 3 4

𝐶3

7

2 1

𝐶 𝐶

Biến cố X = 2 có nghĩa là chọn được 2 nữ và 1 nam, vậy 𝑃(𝑋 = 2) = 3 4

𝐶3

7

=

35

= 18

35

= 12

35

Biến cố X = 3 có nghĩa là chọn được 3 bạn đều nữ, vậy 𝑃(𝑋 = 3) = 3 = 1

𝐶

3

𝐶3 35

7

Bảng phân phối xác suất của X:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | *0* | *1* | *2* | *3* |
| *P* | *4/35* | *18/35* | *12/35* | *1/35* |

**Ví dụ 4**(Lê Văn Dương): Cho DLNN X có hàm mật độ xác suất như sau:

( ) ( )

𝑎𝑥2 𝑘ℎ𝑖 0 ≤ 𝑥 ≤ 1

1. Xác định hệ số a
2. Tìm P(2 < X < 3)

𝑓 𝑥

= 𝑓 𝑥 = {

0 𝑘ℎ𝑖 𝑥 ∉ [0; 1]

#### Giải:

1. Vì f(x) là hàm mật độ xác suất của X nên thỏa mãn 2 điều kiện:

(1) 𝑓(𝑥) ≥ 0 ∀ 𝑥 ∈ (−∞; +∞)

Với 𝑥 ∉ [0; 1] , 𝑓(𝑥) = 0 (𝑇𝑀)

Với 𝑥 ∈ [0; 1], 𝑓(𝑥) = 𝑎𝑥2 ≥ 0 𝑘ℎ𝑖 𝑎 ≥ 0

(2) Xét

∫+∞ 𝑓(𝑥)𝑑𝑥 = 1 ⟺

−∞

𝑥3 1

0

∫1 𝑎𝑥2𝑑𝑥 = 1

𝑎. |

3 0

= 1 ⟺ 𝑎 = 3 (𝑇𝑀)

1. Tính P(2 < X < 3)

P(2 < X < 3) = ∫3 3𝑥2𝑑𝑥 =

2

𝑥3|3 = 19

2

**Ví dụ 5**(Lê Văn Dương): Cho X là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ xác suất xác định bởi:

0 𝑘ℎ𝑖 𝑥 ∉ [0; 3]

𝑓(𝑥) = {𝑥2 − 3𝑥 𝑘ℎ𝑖 𝑥 ∈ [0; 3]

Tìm hàm phân phối xác suất của X

#### Giải:

Do X là biến ngẫu nhiên liên tục nên ta có 𝐹(𝑥) =

𝑥

∫−*∞*

𝑓(𝑥)𝑑𝑥

ﻟ

0 𝑘ℎ𝑖 𝑥 < 0

𝐹(𝑥) =

I∫(𝑥2 − 3𝑥)𝑑𝑥 𝑘ℎ𝑖 𝑥 ∈ [0; 3]

0

❪ 3

I ∫(𝑥2 − 3𝑥)𝑑𝑥 𝑘ℎ𝑖 𝑥 > 3

𝗅 0

+) 𝑥 2

𝑥3

3𝑥2 𝑥 𝑥3 3𝑥2

∫0 (𝑥

− 3𝑥) 𝑑𝑥 = ( −

3

)| = −

2 0 3 2

+) 3 2

𝑥3

3𝑥2 3 9

∫0 (𝑥

− 3𝑥) 𝑑𝑥 = ( −

3

)| = −

2 0 2

0 𝑘ℎ𝑖 𝑥 < 0

𝑥3 − 3𝑥2

𝑘ℎ𝑖

Vậy 𝐹(𝑥) = { 3 2

𝑥 ∈ [0; 3]

− 9 𝑘ℎ𝑖 𝑥 > 3

2

#### PHÂN BỐ XÁC SUẤT

**Ví dụ 1** (Phạm Quang Kiên): Một hộp có 3 quả cầu trắng, 2 quả cầu đen. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng quả cầu (không hoàn lại) cho đến khi lấy được quả cầu trắng thì dừng. Lập bảng phân phối xác suất của số quả cầu lấy ra.

#### Giải

Gọi X là số quả cầu lấy ra. X là ĐLNN rời rạc nhận một trong các giá trị có thể là 1,2,3. Gọi Ai là biến cố “lần thứ I lấy được quả cầu trắng” (i = 1,2,3)

Vì lấy không hoàn lại nên các biến cố A1; A2; A3 không độc lập với nhau, do đó

P1 = P(X = 1) = P(A1) = 3 =0,6

5

P2 = P(X=2) = P(

P = P(X=3) =

𝐴1𝐴2 ) = 𝑃(𝐴1)𝑃(𝐴2/𝐴1) =

2 . 3

5 4

= 0,3

2 1 3

3 𝑃(𝐴1𝐴2𝐴3) = 𝑃(𝐴1)𝑃(𝐴2/𝐴1)𝑃(𝐴3/𝐴1𝐴2) =

. .

5 4 3

= 0,1

Vậy bảng phân phối xác suất của X là

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | *1* | *2* | *3* |
| *P* | *0,6* | *0,3* | *0,1* |

**Ví dụ 2** (Phạm Quang Kiên): Có hai lô sản phẩm với tỷ lệ phế phẩm tương ứng là 0,1 và 0,2. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi lô ra một sản phẩm. Hãy thiết lập bảng phân phối xác suất của số phế phẩm có trong 2 sản phẩm lấy ra

#### Giải

Gọi X là số phế phẩm có trong hai sản phẩm lấy ra. Khi đó X là ĐLNN rời rạc nhận một trong các giá trị có thể là 0,1,2.

Gọi Ai là biến cố “sản phẩm lấy ở lô thứ i là phế phẩm” (i=1;2) Vì A1, A2 độc lập với nhau nên

P0 = P(X=0)=𝑃(𝐴1𝐴2) = 𝑃(𝐴1)𝑃(𝐴2) = (1 − 0,1)(1 − 0,2) = 0,72

P1 = P(X=1)=𝑃(𝐴1𝐴2) + 𝑃(𝐴1𝐴2) = 0,1.0,8 + 0,9.0,2 = 0,26

P2= P(X=2)=𝑃(𝐴1𝐴2) = 0,1.0,2 = 0,02

Vậy bảng phân phối xác suất của X là:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | *0* | *1* | *2* |
| *P* | *0,72* | *0,26* | *0,02* |

**Ví dụ 3** (Phạm Quang Kiên): Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất như sau:

𝑓(𝑥) = {

a, Tìm a.

0, 𝑥 ∉ [−

acos 𝑥 , 𝑥 ∈ [−

𝜋 𝜋

; ]

2 2

𝜋 𝜋

; ]

2 2

b, Tìm hàm phân phối xác suất tương ứng

c, Tính P{0 ≤ 𝑋 ≤

#### Giải

𝜋} 4

𝑓(𝑥) ≥ 0 ∀𝑥 (1)

a, Để f(x) là hàm mật độ xác suất thì ta cần tìm a để thoả mãn {

−∞

Xét (1):

∫+∞ 𝑓(𝑥)𝑑𝑥 = 1

(2)

∀𝑥 ∉ [− 𝜋

2

; 𝜋 2

] thì f(x) = 0 thoả mãn (1)

∀𝑥 ∈ [−

Xét (2):

+∞

𝜋 ;

2

𝜋] thì f(x) = a cos x ≥ 0 𝑘ℎ𝑖 𝑎 ≥ 0

2

∫ f(x)dx = 1

−∞

π 2

↔ ∫ a cos x dx = 1

−π 2

𝜋

1

↔ (− a. sin 𝑥) |2 = 1 → 𝑎 =

−𝜋

2 2

## b, Tìm F(x)

−π

ﻟ 0 khi x < 2

I x

I 1 −π π

x

F(x) = ∫ f(x)dx =

I ∫ 2 cos x dx khi x ∈ [ 2 ; 2]

−π

❪ 2 π

−∞ I z

I 1 π

Ta có:

∫ cos x dx khi x >

I 2 2

−π

𝗅 z

x

1 1 x 1

∫ 2 cos x dx = 2 sin x | −π = 2 (1 + sin x)

−π 2

2

−π

ﻟ 0 khi x < 2

→ F(x) =

I1 −π π

(1 + sin x) khi x ∈ [ ;

❪2 2 2

π

1 khi x >

𝗅

2

c, Tính P{0 ≤ 𝑋 ≤

π

𝜋} 4

π √2

P (0 ≤ X ≤

) = F ( 4 4

) − F(0) =

4

**Ví dụ 4** (Phạm Quang Kiên): Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm phân phối xác suất như sau:

0 khi x ≤ −1 F(x) = {a + b arcsin x

1 khi x ≥ 1

a, Xác định hằng số a, b

khi − 1 < x < 1

b, Tìm hàm mật độ xác suất f(x)

#### Giải

a,F(x) là hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục nên F(x) liên tục tại x= -1 và x=1.

lim

{x→−1−

F(x) = lim

x→−1+

F(x)

0 = a − b. π

{ 2  {

a = 1

2

lim

x→1+

b,

F(x) = lim

x→1−

F(x)

1 = a + b. π

2

b = 1

π

0 khi x ≤ −1 𝖴 x ≥ 1

f(x) = F′(x) = {1 . 1

khi − 1 < x < 1

π √1 − x2

**Ví dụ 5** (Phạm Quang Kiên): Một chùm chìa khoá gồm 4 chiếc giống nhau, trong đó chỉ có một chiếc mở đc cửa. Người ta thử ngẫu nhiên từng chiếc cho đến khi mở được cửa. Gọi X là số lần thử. Tìm phân phối xác suất của X

#### Giải

X có thể nhận các giá trị 1,2,3,4

Gọi Ai là biến cố “mở được cửa ở lần thứ i”(i= 1,2,3,4)

P(X=1)=P(A1)=1

4

𝑃(𝑋 = 2) = 𝑃(𝐴1𝐴2) = 𝑃(𝐴1)𝑃(𝐴2/𝐴1) = 0,25

3.2.1

𝑃(𝑋 = 3) = 𝑃(𝐴1𝐴2𝐴3) = 𝑃(𝐴1)𝑃(𝐴2/𝐴1)𝑃(𝐴3/𝐴1𝐴2) = 4.3.2 = 0,25

𝑃(𝑋 = 4) = 1 − 𝑃(𝑋 = 1) − 𝑃(𝑋 = 2) − 𝑃(𝑋 = 3) = 0,25

Vậy bảng phân phối xác suất của X là

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | *1* | *2* | *3* | *4* |
| *P* | *0,25* | *0,25* | *0,25* | *0,25* |

#### CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN

#### KỲ VỌNG

**Ví dụ 1** (Nguyễn Thị Thuý Dân): Tìm kỳ vọng của biến ngẫu nhiên rời rạc X có phân bảng phân phối xác suất như sau:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | *0* | *1* | *2* | *3* |
| *P* | *1/35* | *12/35* | *18/35* | *4/35* |

Giải

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên rời rạc X là:

E(X) = ∑3

i=1

xi ⋅ pi

= 0 . 1

35

+ 1 . 12

35

+ 2 . 18

35

+ 3. 4

35

= 4 ≈ 1,7143

35

**Ví dụ 2** (Nguyễn Thị Thuý Dân): Tuổi thọ tính theo giờ của 1 thiết bị điện tử là một

biến ngẫu nhiên X có hàm mật đọ xác suất là:

f(x) = {

200 , x > 10

x3

0 , x ≤ 10

Hãy tính tuổi thọ trung bình của loại thiết bị điện tử này. Giải

Tuổi thọ trung bình chính là kỳ vọng của loại thiết bị điện tử, ta có:

+∞

E(X) = +∞ x . f(x) dx = ∫ x . 200

∫−∞

A

200

10 x3

20 A

= lim

A→+∞

=

∫ x .

10

200

x3

200

= lim |

A→+∞ 10

x2

200

lim ( − ) = -20 (vì A → +∞ →

≈ 0)

A→+∞ A 10 A

**Ví dụ 3** (Nguyễn Thị Thuý Dân): Thời gian (đơn vị đo 100 giờ) mà một gia đình cho chạy một chiếc máy hút bụi trong 1 năm là biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ như sau:

x , 0 < x < 1

f(x) =

2 − x , 1 ≤ x < 2

𝗅 0 , x > 2

Hỏi rằng trung bình 1 năm, gia đình đó chạy máy hút bụi bao nhiêu giờ? Giải

Gia đình đó chạy máy hút bụi số giờ trung bình mỗi năm chính là kì vọng (đơn vị 100 giờ):

−∞

E(X) =

∫+∞ x . f(x) dx

= ∫2 x . (2 − x) dx

1

= (x2 −

3

2

x )|

3 1

= (22 - 23 ) - (12 - 13 )

3 3

= 2

3

Vậy số giờ trung bình mỗi năm gia đình đó chạy máy hút bụi là: 2

3

. 100 ≈

66,67 (giờ/năm)

**Ví dụ 4** (Nguyễn Thị Thuý Dân): Trong một đội tuyển, 3 vận động viên A, B và C thi đấu với xác suất thắng trận của mỗi người lần lượt là 0,6; 0,7 và 0,8. Trong một đợt thi đấu, mỗi vận động viên thi đấu một trận độc lập nhau. Tính trung bình số trận thắng của của đội tuyển?

Giải

Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số trận thắng của đội tuyển. X nhận các giá trị: 0,1,2,3. Gọi A là biến cố: “Vận động viên A thắng”

Gọi B là biến cố: “Vận động viên B thắng” Gọi C là biến cố: “Vận động viên C thắng” Ta có:

P(X = 0) = P(A̅. B̅. C̅) = P(A̅). P(B̅). P(C̅) = 0,4.0,3.0,2 = 0,02

P(X = 1) = P(A. B̅. C̅ + A̅. B̅. C + A̅. B. C̅)

= 0,6.0,3.0,2 + 0,4.0,3.0,8 + 0,4.0,7.0,2= 0,188

P(X = 2) = P(A. B. C̅ + A̅. B. C + A. B̅. C)0,6.0,7.0,2 + 0,4.0,7.0.8 + 0,6.0,3.0,8

= 0,452

P(X = 3) = P(A. B. C) = P(A). P(B). P(C)

= 0,6.0,7.0,8 = 0,336

Bảng phân phối xác suất X:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | *0* | *1* | *2* | *3* |
| *P(X)* | *0,024* | *0,188* | *0,452* | *0,336* |

Trung bình số trận thắng của của đội tuyển chính là kì vọng:

E(X) = ∑3 xi ⋅ pi = 0.0,024 + 1.0,188 + 2.0,452 +3.0,336 = 2,1

i=1

Vậy trung bình số trận thắng của đội tuyển là 2,1 (trận).

Ví dụ 5 (Nguyễn Thị Thuý Dân): Đại lượng ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | *-1* | *0* | *1* | *2* | *3* |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *P(X)* | *0,02* | *0,16* | *0,24* | *0,54* | *0,6* |

Tìm kỳ vọng 𝐄(𝜑(𝐱)) nếu 𝜑(𝐱) = x+1 Giải

Ta có bảng phân phối xác suất của 𝜑(𝐱)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 𝝋(𝑿) | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* |
| *P(*𝝋(𝑿) | *0,02* | *0,16* | *0,24* | *0,54* | *0,6* |

Có: 𝐄(𝜑(𝐗)) = ∑𝟒

𝐢=𝟏

𝜑(𝐱𝐢) ⋅ 𝐏𝐢 = 0.0,02 + 1.0,16 + 2.0,24 + 3.0,54 + 4.0,6

= 4,66

#### PHƯƠNG SAI

**Ví dụ 1**(Trịnh Quang Nam): Cho X và Y tương ứng là các biến ngẫu nhiên độc lập chỉ lợi nhuận (tính theo %) hàng năm khi đầu tư vào hai ngành A và B nào đó. Giả sử E(X)

= 12, V(X) = 25, E(Y) = 14, V(Y) = 36. Một người đầu tư vào cả hai ngành A và B thì cần lựa chọn tỷ lệ đầu tư như thế nào để ít rủi ro nhất.

#### Giải:

Gọi a là tỷ lệ phần trăm vốn đầu tư vào ngành A, khi đó tỷ lệ phần trăm vốn đầu tư vào ngành B của người đó là 1 – a .

Gọi Z là lợi nhuận của phương án đầu tư này, ta có:

Z =aX+(1-a) Y.

Từ đó suy ra: V(Z)=V(Ax+(1-1)Y)=a2 V(X)+(1-a)2V(Y)

=25a2 + (1-2a+a2)36=61a2-72a+36

Để độ rủi ro của phương án đầu tư nhỏ nhất, ta cần chọn a sao cho V(Z) nhỏ nhất. Dễ thấy được 2

61a2- 72a +36 đạt giá trị cực tiểu khi a 36/ 61 ≅59% .

Vậy người đầu tư nên đầu tư 59% vốn vào ngành A và 41% vốn vào ngành B.

**Ví dụ 2**(Trịnh Quang Nam): Một cơ sở sản xuất các bao kẹo. Số kẹo trong mỗi bao là một biến ngẫu nhiên có phân phối xác suất như sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Số kẹo trong bao* | *18* | *19* | *20* | *21* | *22* |
| *Xác suất* | *0,14* | *0,24* | *0,32* | *0,21* | *0,09* |

a/ Tìm trung bình và phương sai của số viên kẹo trong mỗi bao.

b/ Chi phí sản xuất của mỗ bao kẹo là 3X + 16, trong ñó X là biến ngẫu nhiên chỉ số kẹo trong bao. Tiền bán mỗi bao kẹo là 100$. Không phân biệt số kẹo trong bao. Tìm lợi nhuận trung bình và độ lệch chuẩn của lợi nhuận cho mỗi bao kẹo.

#### Giải:

Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số kẹo trong bao.

a/ Trung bình và phương sai của số viên kẹo trong mỗi bao :

E(X) = ∑22

i=18

i . P(X = i) = 19,87

và phương sai của số viên kẹo trong mỗi bao:

D(X) = E(X2) - E(X)2 = 1,3531

b/ Gọi Y là biến ngẫu nhiên chỉ lợi nhuận cho mỗi bao kẹo. Ta có:

Y = 84 - 3X

lợi nhuận trung bình

E(Y) = E(84 - 3X) = 84 - 3E(X) = 24,39

và độ lệch chuẩn của lợi nhuận cho mỗi bao kẹo

σ(Y) = √D(Y) = √D(84 − 3X) = 3√D(X) = 3,48969

Ví dụ 3(Trịnh Quang Nam): Đại lượng ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | *-2* | *-1* | *0* | *1* | *2* |
| *P(X)* | *0,1* | *0,15* | *0,25* | *0,4* | *0,1* |

Tìm kỳ vọng

*E*( *f* (*x*))

nếu f(x)=x+1

Giải:

Ta có bảng phân phối xác suất của f(x):

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *f(x)* | *-1* | *0* | *1* | *2* | *3* |
| *P(f(x))* | *0,1* | *0,15* | *0,25* | *0,4* | *0,1* |

3

*E*( *f* (*x*))   *fi* (*x*)*Pi* ( *f* (*x*))  (1).0,1 0.0,15 1.0, 25  2.0, 4  3.0,1  1, 25

1

Ví dụ 4(Trịnh Quang Nam):Thời gian xếp hàng chờ lên máy bay của khách hàng là biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất như sau:

 4 3

*f* (*x*)  81 *x*



0

*khi x* [0;3]

*khi x* [0;3]

Tìm thời gian xếp hàng trung bình của khách hàng? Giải:

Thời gian xếp hàng trung bình của khách hàng chính là kỳ vọng

*E*( *X* ) 

 4

*xf* (*x*)*dx* 



3 4 3 12

*x dx*  *x* 

 4 5

 81 0

405 0 5

* + 1. **ĐỘ LỆCH CHUẨN Ví dụ 1**(Bùi Vũ Huyền Linh):

Cho biến ngẫu nhiên X có hàm phân phối tích lũy

F(x) =

1 − 𝑒−3𝑥, 𝑥 > 0

{ 0, 𝑥 ≤ 0 }

Tính kỳ vọng và độ lệch chuẩn của X.

#### Giải:

Hàm mật độ xác suất

F(x) =

1 − 𝑒−3𝑥, 𝑥 > 0

{

Kỳ vọng

0, 𝑥 ≤ 0 }

E(X) = ∫+∞ 𝑥. 𝑓(𝑥)𝑑𝑥 = ∫+∞ 𝑥. 3𝑒−3𝑥𝑑𝑥 = − ∫+∞ 𝑥𝑑(𝑒−3𝑥)

−∞ 0 0

= 𝑥𝑒−3𝑒 + +∞ 𝑥. 3𝑒−3𝑥𝑑𝑥 = 0 + 1 + ∫+∞ 𝑥. 3𝑒−3𝑥𝑑𝑥

∫

0 3 0

D(X) = E(𝑋2) − [(𝑋2)] =

+∞ 𝑥2𝑓(𝑥)𝑑𝑥 - 1

∫−∞ 9

= −𝑥2𝑒−3𝑥+ 2 +∞ 𝑥2𝑓(𝑥)𝑑𝑥 - 1

∫−∞ 9

= 0 + 2 ∫+∞ 𝑥2𝑓(𝑥)𝑑𝑥 - 1 = 1

3 −∞ 9 9

Độ lệch chuẩn của X là:

𝜎𝑥

= √𝐷(𝑋) = 1

3

**Ví dụ 2**(Bùi Vũ Huyền Linh):

Gọi X là biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất sau:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***X*** | *-1* | *0* | *3* |
| ***P*** | *0.5* | *0.2* | *0.3* |

Tính độ lệch chuẩn của X.

#### Giải:

Ta có:

E(X) = -1(0.5) + 0(0.2) +3(0.3) = 0.4

E(𝑋2)= (−1)2(0.5) + (0)2(0.2) +(3)2(0.3) =3.2 D(X) = E(𝑋2)- (𝐸(𝑋))2=3.04

𝜎𝑥

= √𝐷(𝑋) = 2√19

5

**Ví dụ 3**(Bùi Vũ Huyền Linh):Giám đốc một xí nghiệp cho biết lương trung bình của

một công nhân thuộc xí nghiệp là 380 nghìn đồng/ tháng. Chọn ngẫu nhiên 36 công

nhân thấy lương trung bình là 350 nghìn đồng/ tháng, với độ lệch chuẩn

 40

nghìn. Lời báo cáo của giám đốc có tin cậy được không, với mức ý nghĩa là 5%.

#### Giải

Giả thiết: H0: a = 380;

H1 : a  380

A là tiền lương trung bình thực sự của công nhân.

a0 = 380: là tiền lương trung bình của công nhân theo lời giám đốc.

x  350, n  36  30,  40,  5%

### Do   5%    1    0,95  t  1,96

Ta có: t  

 350  380

40



x  a0 n

36  4,5  1,96 . Bác bỏ H0

Kết luận: với mức ý nghĩa là 5% không tin vào lời giám đốc. Lương trung bình thực sự của công nhân nhỏ hơn 380 nghìn đồng/ tháng.

**Ví dụ 4**(Bùi Vũ Huyền Linh):

Trọng lượng các bao bột mì tại một cửa hàng lương thực là một đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Kiểm tra 20 bao, thấy trọng lượng trung bình của mỗi bao bột mì

là: 48 kg, và phương sai mẫu điều chỉnh là

s2  0,5kg2 .

* + - 1. Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng trọng lượng trung bình của một bao bột mì thuộc cửa hàng.
      2. Với độ chính xác 0,26 kg, xác định độ tin cậy.
      3. Với độ chính xác 160 g, độ tin cậy là 95% . Tính cở mẫu n?

#### Giải

1) Áp dụng trường hợp:

### n  30,2

chưa biết

n = 20, x  48,   95%,s  0,5

  0,95  t19  2,093 (tra bảng H)



a  x  tn1 s



n

1



a  x  tn1 s



n

2



 48  2,093. 0,5

20

 48  2,093. 0,5

20

 47,766

 48, 234

Vậy với độ tin cậy là 95%, trọng lượng trung bình của một bao bột mì thuộc cửa hàng (47,766; 48,234) kg

2)   0,26,n  20

tn1  0, 26 20  2,325  2,3457

 0,5

Tra bảng H    97%

Vậy với độ chính xác 0,26 kg thì độ tin cậy là 97%

### 3)   0,16kg,   95%  t  1,96

Do  95%

nên t  1,96

 t2 s2 

1,962 .0,52 

n      1     1  37,51  1  37  1  38

 2   0,162 

**Ví dụ 5**(Bùi Vũ Huyền Linh):

Cho biến ngẫu nhiên X có hàm phân phối tích lũy

F(x) =

1 − 𝑒−3𝑥, 𝑥 > 0

{ 0, 𝑥 ≤ 0 }

Tính kỳ vọng và độ lệch chuẩn của X.

#### Giải:

Hàm mật độ xác suất:

F(x) =

1 − 𝑒−3𝑥, 𝑥 > 0

{

Kỳ vọng:

0, 𝑥 ≤ 0 }

E(X) = ∫+∞ 𝑥. 𝑓(𝑥)𝑑𝑥 = ∫+∞ 𝑥. 3𝑒−3𝑥𝑑𝑥 = − ∫+∞ 𝑥𝑑(𝑒−3𝑥)

−∞ 0 0

= 𝑥𝑒−3𝑒 + +∞ 𝑥. 3𝑒−3𝑥𝑑𝑥 = 0 + 1 + +∞ 𝑥. 3𝑒−3𝑥𝑑𝑥

∫

0 3 ∫0

V(X) = E(𝑋2) − [(𝑋2)] =

+∞ 𝑥2𝑓(𝑥)𝑑𝑥 - 1

∫−∞ 9

= −𝑥2𝑒−3𝑥+ 2 ∫+∞ 𝑥2𝑓(𝑥)𝑑𝑥 - 1

−∞ 9

= 0 + 2 ∫+∞ 𝑥2𝑓(𝑥)𝑑𝑥 - 1 = 1

3 −∞ 9 9

Độ lệch chuẩn của X là:

𝜎𝑥

= √𝑉(𝑋) = 1

3

#### MỘT SỐ PHÂN PHỐI XÁC SUẤT THƯỜNG GẶP

#### PHÂN PHỐI NHỊ THỨC

**Ví dụ 1**(Tạ Phương Linh): Có 8000 sản phẩm trong đó có 2000 sản phẩm không đạt tiêu chuẩn kỹ thuật. Lấy ngẫu nhiên (không hoàn lại) 10 sản phẩm Tính xác suất để trong 10 sản phẩm lấy ra có 2 sản phẩm không đạt tiêu chuẩn.

#### Giải:

Goị X là số sản phẩm không đạt tiêu chuẩn trong 10 sản phẩm lấy ra.Ta có, X~ B

(10,2000 ) = B (10,0.25).

8000

Khi đó, xác suất để trong 10 sản phẩm lấy ra có 2 sản phảm không đạt tiêu chuẩn là P(X=2)=∁2 (0.25)2(0.75)8 = 0.282

10

**Ví dụ 2**(Tạ Phương Linh): Giả sử tỷ lệ sinh con trai và con gái là bằng nhau và bằng 1.

2

Một gia đình có 4 người con. Tính xác suất để 4 đứa con đó gồm

* 2 trai và 2 gái.
* 1 trai và 3 gái
* 4 trai

#### Giải:

Gọi X là số con trai trong một gia đình có 4 con thì X ~ B (4,0.5)

1. Xác suất để có hai con trai và hai con gái trong gia đình 4 đứa con là

P(X=2)=∁2(0.5)2(0.5)2 = 0.375

4

1. Xác suất để có một đứa con trai trong bốn đứa con là

P(X=1)=∁1(0.5)1(0.5)3 = 0.25

4

1. Xác suất để cả 4 đều là trai là

P(X=4)=∁4(0.5)4(0.5)0 = 0.0625

4

**Ví dụ 3**(Tạ Phương Linh): Tỷ lệ một loại bệnh bẩm sinh trong dân số là p=0.01. Bệnh này cần sự chăm sóc đặc biệt lúc mới sinh. Một nhà bảo sinh thường có 20 ca sinh trong một tuần. Tính xác suất để.

1. không có trường hợp nào cần chăm sóc đặc biệt,
2. có đúng một trường hợp cần chăm sóc đặc biệt,

#### Giải:

1. Xác suất để không có trường hợp nào cần chăm sóc đặc biệt là P(X=0)=∁0 (0.01)0(0.99)20 = 0.818

20

1. Xác suất có đúng một trường hợp cần chăm sóc đặc biệt là

P(X=1)=∁1 (0.01)1(0.99)19 = 0.165

20

**Ví dụ 4**(Tạ Phương Linh): Dựa vào số liệu trong quá khứ, ta ước lương rằng 85% các sản phẩm của một máy sản xuất nào đó là thứ phẩm. Nếu máy này sản xuất 20 sản phẩm mỗi giờ thì xác suất 8 hoặc 9 thứ phẩm được sản xuất trong mỗi khoảng thời gian 30 phút là bao nhiêu?

#### Giải:

Vì mỗi giờ sản xuất được 20 sản phẩm nên mỗi khoảng thời gian 30 phút máy sản xuất được 10 sản phẩm .Gọi X là số thứ phẩm máy sản xuất ra trong 30 phút theo giả thiết ta có X ~ B (10,0.85) . Ta cần tìm

𝑃(𝑋 ∈ {8,9}) = 𝑃(𝑋 = 8) + 𝑃(𝑋 = 9)

= (0.85)8(0.15)2 + ∁9 (0.85)9(0.15)1

10

= 0.6233

**Ví dụ 5**(Tạ Phương Linh): Một bài kiểm tra trắc nghiệm có 20 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 lựa chọn, trong đó chỉ có 1 lựa chọn đúng. Một sinh viên chọn ngẫu nhiên độc lập kết

quả của 20 câu hỏi đó. Tính xác suất để sinh viên đó chọn được số kết quả đúng không bé hơn 10.

#### Giải:

Gọi X là số câu được chọn đáp án đúng thì X ~ B (20,1)

4

Xác suất để số đáp án đúng không bé hơn 10 là

20

𝑃[𝑋 ≥ 10] = ∑ ∁𝑘 (

20

𝑘=10

1

) (1 −

4

1 20−𝑘

) 4

≈ 0,01386

#### PHÂN PHỐI POISSON

**Ví dụ 1** (Trương Thị Bích): Một biến ngẫu nhiên X có phân phối Poisson với tham số λ sao cho P (X = 1) = (0,2) P(X = 2). Tìm P (X = 0).

#### Giải

Đối với phân phối Poisson, hàm xác suất được định nghĩa là:

P (X = x) = ⅇ−λ⋅λx , trong đó λ là một tham số.

x!

Cho rằng, P (x = 1) = (0,2).P (X = 2)

ⅇ−λ⋅λ1= (0,2). ⅇ−λ⋅λ2

1! 2!

⇒l = 12

10

⇒λ = 10

Bây giờ, thay λ = 10 vào công thức, chúng ta nhận được:

P (X = 0) = ⅇ−λ.λ0

0!

P (X = 0) = e -10 = 0,0000454 Như vậy, P (X = 0) = 0,0000454

**Ví dụ 2** (Trương Thị Bích): Các cuộc gọi điện thoại đến một tổng đài theo quy trình Poisson với tốc độ λ = 2 / phút. Tính xác suất để trong 5 phút đầu giờ nhận được đúng hai cuộc gọi.

#### Giải

Giả sử rằng “N” là số cuộc gọi nhận được trong khoảng thời gian 1 phút. Vì thế,

P (N = 2) = ⅇ−2.22

2!

P (N = 2) = 2e -2.

Bây giờ, “M” là số phút trong số 5 phút được xem xét, trong đó có chính xác 2 cuộc gọi sẽ được nhận. Do đó “M” tuân theo phân phối nhị thức với các tham số n = 5 và p = 2e - 2 .

P (M = 5) = 32. e -10

P (M = 5) = 0,00145, trong đó “e” là hằng số, xấp xỉ bằng 2,718.

**Ví dụ 3** (Trương Thị Bích): Xác Suất một chai rượu bị bể khi vận chuyển là 0,001. Giả SỬ Vận chuyển 4000 chai. Tìm số chai rượu bị bể trung bình và số chai bị bể tin chắc nhất khi vận chuyển.

#### Giải

Gọi X là số chai rượu bị bể khi vận chuyển 4000 chai. X là đại lượng ngẫu nhiên và X - P(A) Với X = nếp = 4000 x 0,001 = 4 Số chai rượu bị bể trung bình khi vận chuyển chính là

E(X): F(X) = A = 4

Tức là có trung bình 4 chai rượu bị bể khi vận chuyển 4000 chai. Số chai rượu bị bể tin chắc nhất khi vận chuyển 4000 chai chính là Mod(X). Theo Công thức (3.11), ta có:

3 < Mod(X) < 4

Vậy:

Mod(X) = 3 hoặc Mod(X) = 4

Tức số chai rượu bị bể tin chắc nhất (Có khả năng xảy ra nhiều nhất) là 3 chai hoặc 4 chai.

**Ví dụ 4** (Trương Thị Bích): Xác suất 1 sản phẩm không được kiểm tra chất lượng là 8%.

1. Tính xác suất trong 900 sản phẩm có 70 sản phẩm không được kiểm tra chất lượng từ nhà máy .
2. Tính xác suất trong 9000 sản phẩm có từ 700 đến 800 sản phẩm không được kiểm tra chất lượng.

#### Giải

Gọi X là số sản phẩm không được kiểm tra trong 900 sản phẩm a, n = 900, p = 0,02, k = 20, np = 18

P(X=20) = ⅇ18.1820 = 0,0798

20

B, n = 900, p = 0,02, k1= 0, k2= 20

P(0 < X < 20) = ⅇ−18.18k = 0,7307

k!

**Ví dụ 5** (Trương Thị Bích): Một máy dệt có 5000 ống sợi hoạt động độc lập.xs để mỗi ống sợi bị đứt trong 1 phút là 0,0005.

1. Tính xác suất để trong 1 phút có 3 ống sợi bị đứt
2. Tính xác suất để trong 3 phút có 3 ống sợi bị đứt
3. Tính xác suất để trong 3 phút liên tiếp mà mỗi phút có một ống sợi bị đứt

**Giải**

Xác suất để trong 1 phút có 3 ống sợ bị đứt:

P(X=3) = (2,53.3!). e-25 = 0,2138

Gọi Y là số ống sợi bị dứt trong 3 phút:

* Y ~ P = 2,5.3= (7,5)

Xác suất để trong 3 phút có 3 ống sợi bị đứt là:

P(Y=3) = 7,5 .e-7,5= 0,039

3!

#### PHÂN PHỐI CHUẨN

**Ví dụ 1** (Hà Bích Ngọc): Cho biến ngẫu nhiên X tuân theo luật phân phối chuẩn N(30;0,01). Tìm P(|𝑋 − 30| < 20).

#### Giải

Do X tuân theo luật phân phối chuẩn N(30;0,01); (𝑎 = 30; 𝜎 = 0,1) khi đó ta có:

P(|𝑋 − 30| < 20) =

0,2

−0,2

( ) ( )

𝛷 (

) − 𝛷 (

0.1

0.1

) = 𝛷 2

− 𝛷 −2

= 0,9545

**Ví dụ 2** (Hà Bích Ngọc): Trọng lượng X (gam) của một gói mỳ ăn liền là đại lượng ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn N(100;4). Sản phẩm đạt tiêu chuẩn nếu trọng lượng của nó từ 94 gam đến 103 gam. Tính xác suất để lấy ra gói mỳ đạt tiêu chuẩn.

#### Giải

Do X tuân theo luật phân phối chuẩn N(100,4) ,(𝑎 = 100, 𝜎 = 2)

P(94≤ 𝑋 ≤ 103)= 𝛷 (103−100) − 𝛷 (94−100

)

2 2

= 𝛷(1,5) − 𝛷(−3) = 0,9332 − 0,0013 = 0,9319

**Ví dụ 3** (Hà Bích Ngọc): Một người cân nhắc giữa việc mua nhà và gửi tiết kiệm 1 năm với lãi suất 12%/năm và chờ năm sau mua nhà. Biết rằng mức tăng giá nhà là đại lượng

ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn với mức tăng trung bình là 8%/năm, độ lệch tiêu chuẩn là 10%/năm. Tìm khả năng rủi ro của người đó.

#### Giải

Tìm mức độ rủi ro của người đó nghĩa là ta tìm xác suất để người đó không mua được nhà. Ta có xác suất để người đó không mua được nhà là:

P(X>0,12) = 𝛷(+∞) − 𝛷 (0,12−0,08 ( )

0.1

) = 1 − 𝛷

0,4

= 0,3446.

**Ví dụ 4** (Hà Bích Ngọc): Có hai công ty hoạt động trên hai lĩnh vực độc lập nhau. Biết lãi suất cổ phiếu của hai công ty là các biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn N(11%;16%) và N(10,4%;6,25%).

1. Nếu một người muốn đạt lãi suất tối thiểu 10% thì nên mua cổ phiếu của công ty nào?
2. Nếu người đó muốn hạn chế rủi ro bằng cách mua cổ phiếu của cả hai công ty thì nên mua theo tỷ lệ nào để mức rủi ro về lãi suất là bé nhất?

#### Giải

1. Gọi X là đại lượng ngẫu nhiên chỉ lãi suất cổ phiếu của công ty thứ nhất, Y là đại lượng ngẫu nhiên chỉ lãi suất cổ phiếu của công ty thứ hai.

Khi đó X~N(11%;16%); Y~N(10,4%;6,25%)

10−11

P(X≥ 10) = 𝛷(+∞) − 𝛷 (

) = 1 − 𝛷(−0,25) = 𝛷(0,25)

= 0,5897

4

P(Y≥ 10) = 𝛷(+∞) − 𝛷 (10−10,4

= 0,5636

2,5

) = 1 − 𝛷(−0,16) = 𝛷(0,16)

Ta nên đầu tư vào cổ phiếu của công ty A.

1. Gọi 𝑎 là tỷ lệ đầu tư vào cổ phiếu của công ty A, thì 1−𝑎 là mức đầu tư vào cổ phiếu của công ty B. Lãi suất khi đầu tư vào cổ phiếu của công ty A là 𝑎𝑋; của công ty B là (1−𝑎)𝑌. Để mức rủi ro về lãi suất là thấp nhất thì D(𝑎𝑋 + (1−𝑎)𝑌 ) đạt giá trị nhỏ nhất.

D(𝑎𝑋 + (1−𝑎)𝑌 ) = 𝑎2𝐷(𝑋) + (1 − 𝑎)2𝐷(𝑌)

= 𝑎20,16 + (1 − 𝑎)20,0625

Đạt giá trị nhỏ nhất khi

𝑓′(𝑎) = 0,445𝑎 − 0,125 = 0

{ 𝑓"(𝑎) > 0 ⟺ 𝑎 ≈ 0,2809

Vậy nên đầu tư vào cổ phiếu của công ty A với tỷ lệ là 0,2809.

Và đầu tư vào cổ phiếu của công ty B với tỷ lệ là 1 − 0,2809 = 0,7191

**Ví dụ 5** (Hà Bích Ngọc): Một trạm thú y tiêm phòng cho 5000 con chó, tỷ lệ không miễn dịch sau khi tiêm là 0,01. Tìm xác suất để:

1. Có 40 con không miễn dịch.
2. Có nhiều nhất 60 con không miễn dịch.

#### Giải

Gọi X là số chó không miễn dịch.

a) Áp dụng công thức (\*) với k=40; n=5000; p=0,01; q=1-0,01=0,99

Ta có:

√𝑛𝑝𝑞 = √5000.0,01.0,99=7,0346

𝑘−𝑛𝑝 = 40−5000.0,01 = −1,4215 ≈ −1,42.

√𝑛𝑝𝑞

7,0346

Vì f(x) là hàm chẵn, f(x)=f(-x) nên ta có:

P(X=40) ≈ 1

√𝑛𝑝𝑞

𝑓(1,42) = 0,1456 = 0,0207

7,0346

P(X=40) ≈ 0,0207

b) Áp dụng công thức (\*\*) với 0≤ 𝑘 ≤ 60 ta có k1 = 0; k2= 60 x1 = 𝑘1−𝑛𝑝 = 0−5000.0,01 = −7,11

√𝑛𝑝𝑞

7,0346

x2 = 𝑘2−𝑛𝑝 = 60−5000.0,01 = 1,42

√𝑛𝑝𝑞

7,0346

P(0≤ 𝑘 ≤ 60) ≈ 𝛷0(1,42) − 𝛷0(−7,11) ≈ 0,9222.

Xác suất để có nhiều nhất 60 con chó không miễn dịch là: P(0≤ 𝑋 ≤ 60) ≈ 0,9221.

# CHƯƠNG 3: LÝ THUYẾT MẪU

#### CÁC ĐẶC TRƯNG MẪU

#### KỲ VỌNG MẪU (TRUNG BÌNH MẪU)

**Ví dụ 1**(Lê Văn Dương): Điều tra thu nhập (triệu/năm) hàng năm của 25 hộ gia đình trong vùng ta có bảng số liệu:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Thu nhập* | *11,5* | *11,6* | *11,7* | *11,8* | *11,9* | *12* |
| *Số hộ* | *5* | *8* | *4* | *6* | *1* | *1* |

Hãy ước lượng mức thu nhập trung bình trong vùng với độ tin cậy 95%, biết rằng thu nhập là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

#### Giải

Gọi X là thu nhập của hộ gia đình trong vùng, lúc đó 2 X ~ N (μ; σ2 ), đây là trường hợp σ chưa biết.

Ta có:

𝑛

1

= ∑ xi ni

𝑛

𝑘=0

1

= (11,5.5 + 11,6.8 + 11,7.4 + 11,8.6 + 11,9.1 + 12.1) = 1,672

25

𝑛

𝑆2 = 1 ∑ n x2 – ̅X2 = 0,018048

𝑛 i i

𝑘=0

𝑆′2 = 𝑛

𝑛 − 1

𝑆2 = 0,0188 => 𝑆′ = 0,137

1 − α = 0,95 ; α = 0,05

Có n = 25, γ = 95% => 𝑡(𝑛−1;α) = 𝑡(24;0,05) = 1,71

* 𝑎 ∈ (𝑥̅ − 𝑡

. 𝑆 ; 𝑥̅ + 𝑡

. 𝑆 )

(𝑛−1;α)

√𝑛

(𝑛−1;𝛼)

√𝑛

* 𝑎 ∈ (11,672 − 1.71 0,137 ; 11,672 + 1.71 0,1 37

)

√25

* 𝑎 ∈ (11,625; 11,719)

√25

Vậy với độ tin cậy 95% thì ước lượng mức thu nhập trung bình nằm trong khoảng (11,625; 11,719)

**Ví dụ 2**(Lê Văn Dương): Khảo sát trọng lượng X của vật nuôi trong trại, người ta quan sát một mẫu và có kết quả như sau:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X(kg)* | *36* | *42* | *48* | *54* | *60* | *66* | *72* |
| *Số con* | *15* | *12* | *25* | *18* | *10* | *10* | *10* |

Ước lượng trọng lượng trung bình của loại vật nuôi trên với độ tin cậy 96%

#### Giải:

Ta có n =100;

Kỳ vọng mẫu của X là : ̅X = 1 ∑𝑛

x n = 51,96 (kg)

Phương sai mẫu của X là :

𝑛 𝑘=0 i i

𝑛

𝑆2 = 1 ∑ n x2 – ̅X2 = 121,1188

𝑛 i i

𝑘=0

Phương sai mẫu hiệu chỉnh của X là :

𝑆′2 = 𝑛

𝑛 − 1

a, Có γ = 1 - α = 96% = 0,96

𝑆2 = 122,3412 => 𝑆′ = 11,0608

Do n >= 30, σ chưa biết nên ta có công thức ước lượng khoảng cho kỳ vọng :

𝑎 ∈ (𝑥̅ − 𝑈γ

. 𝑆

√𝑛

; 𝑥̅ + 𝑈γ

. 𝑆 )

√𝑛

Trong đó 𝑈γ

= 𝚽−𝟏

γ

( ) = 𝚽

2

−𝟏(0,48) = 2,06 (tra bảng giá trị hàm Laplace)

11,0608

=> 𝑎 ∈ (51,96 − 2,06 .

√100

11,0608

; 51,96 + 2,06 .

√100

) = (49,68; 54,24)

Vậy với độ tin cậy 96%, trọng lượng trung bình của một con nằm trong khoảng 49,68kg đến 54,24kg

**Ví dụ 3**(Lê Văn Dương): Cân thử 100 trái quýt trong 1 vườn, ta có bảng sau

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X(g)* | *40* | *50* | *60* | *70* | *80* | *90* | *100* | *110* |
| *Số trái* | *3* | *10* | *12* | *15* | *28* | *16* | *11* | *5* |

Hãy ước lượng trọng lượng trung bình của một trái quý trong vườn, biết độ tin cậy là 94%

#### Giải:

Ta có n = 100

Kỳ vọng mẫu của X là :

Phương sai mẫu của X là :

𝑛

: ̅X = 1 ∑ x n

𝑛 i i

𝑘=0

= 77,2

𝑛

𝑆2 = 1 ∑ n x2 – ̅X2 = 298,1596

𝑛 i i

𝑘=0

Phương sai mẫu hiệu chỉnh của X là :

𝑆′2 = 𝑛

𝑛 − 1

Có γ = 1 - α = 94% = 0,94

𝑆2 = 301,1713 => 𝑆′ = 17,3543

Vì n = 100 > 30, σ chưa biết nên ta có công thức ước lượng khoảng cho kỳ vọng :

𝑎 ∈ (𝑥̅ − 𝑈γ

. 𝑆

√𝑛

; 𝑥̅ + 𝑈γ

. 𝑆 )

√𝑛

Trong đó 𝑈γ

= 𝚽−𝟏

γ

( ) = 𝚽

2

−𝟏(0,47) = 1,88 (tra bảng giá trị hàm Laplace)

=> 𝑎 ∈ (77,2 -1,88. 17,3543; 77,2 +1,88. 17,3543) = (73,94;80,46)

√100 √100

Vậy với độ tin cậy 94% trọng lượng trung bình của một trái quýt từ 73,94g đến 80,46g

**Ví dụ 4**(Lê Văn Dương): Đo chiều cao 50 học sinh, thu được bảng sau

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Chiều cao(m)* | *1,5* | *1,55* | *1,6* | *1,65* | *1,7* | *1,75* |
| *Số HS* | *5* | *7* | *8* | *12* | *13* | *5* |

Tính chiều cao trung bình

#### Giải:

Chiều cao trung bình chính là kỳ vọng mẫu

: ̅X = 1 ∑𝑛

x n = 1

(1,5.5 + 1,55.7 + 1,6.8 + 1,65.12 + 1,7.13 + 1,75.5) =

𝑛

1,636

𝑘=0 i i 50

Vậy chiều cao trung bình của học sinh là 1,636m

**Ví dụ 5**(Lê Văn Dương): Để khảo sát chỉ tiêu X của một loại sản phẩm của xí nghiệp Y, người ta quan sát một mẫu trong kho và có kết quả sau

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X(cm)* | *11-15* | *15-19* | *19-23* | *23-27* | *27-31* | *31-35* | *35-39* |
| *Số SP* | *8* | *9* | *20* | *16* | *16* | *13* | *18* |

Tính kích thước trung bình của sản phẩm

#### Giải:

Ta có bảng phân phối tần suất dạng điểm

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X(cm)* | *13* | *17* | *21* | *25* | *29* | *33* | *37* |
| *Số SP* | *8* | *9* | *20* | *16* | *16* | *13* | *18* |

Kích thước trung bình chính là kỳ vọng mẫu:

̅X = 1 ∑𝑛

x n = 1

(12.8 + 17.9 + 21.20 + 25.16 + 29.16 + 33.13 + 37.18) =

𝑛

26,28

𝑘=0 i i

100

Vậy kích thước trung bình là 26,28cm

#### PHƯƠNG SAI MẪU

**Ví dụ 1** (Hà Bích Ngọc): Trọng lượng 1 sản phẩm có phân phối chuẩn với trọng lượng trung bình là 500 gam. Sau 1 thời gian sản xuất, người ta nghi ngờ trọng lượng trung bình của loại sản phẩm này có xu hướng giảm nên tiến hành kiểm tra 25 sản phẩm và thu được kết quả sau:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Trọng lương*  *(g)* | *480* | *485* | *490* | *495* | *500* | *510* |
| *Số sản phẩm* | *2* | *3* | *8* | *5* | *3* | *4* |

Với mức ý nghĩa 5%, hãy kết luận điều nghi ngờ trên có đúng hay không

#### Giải

Ta có bảng sau:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Xi* | *ni* | *niXi* | *ni*𝑋𝑖 *2* |
| *480* | *2* | *960* | *460800* |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *485* | *3* | *1455* | *705675* |
| *490* | *8* | *3920* | *1920800* |
| *495* | *5* | *2475* | *1225125* |
| *500* | *3* | *1500* | *750000* |
| *510* | *4* | *2040* | *1040400* |
|  | *n = 25* | *12350* | *6102800* |

Trung bình mẫu: 𝑋̅ = 1

𝑛

 niXi = 12350/25 = 494 (g)

Phương sai mẫu của X: S2 = 1

𝑛

niXi2 - 𝑋̅2 = 6102800 - 4942 = 76(g)

25



S = √S2 = 8,71779

Giả thiết H0: a = a0 = 500; H1: a1 ≠a0 ≠ 500 Vì n<30 , σ2 chưa biết nên ta có:

K = 𝑋̅−𝑎0 √𝑛 − 1= 494−500 √24 = -3,3717

𝑆

Ta có α = 0,03

8,71779

𝑡(𝑛−1;𝛼) = 𝑡(24;0,03)= 1,974

Ta thấy |K|= 3,3717>1,974 => bác bỏ giả thiêt H0, chấp nhận đối thiết H1 Với mức ý nghĩa 5%, hãy kết luận điều nghi ngờ trên có đúng

Vậy với mức ý nghĩa 5%, hãy kết luận điều nghi ngờ trên là đúng

**Ví dụ 2** (Hà Bích Ngọc): Để nghiên cứu về số con trong một gia đình (SCTMGD) ở địa phương A, người ta điều tra số con của mỗi gia đình trong 30 gia đình được chọn ngẫu nhiên ở địa phương A. Kết quả được ghi lại như sau:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***0*** | ***2*** | ***5*** | ***3*** | ***7*** | ***4*** | ***3*** | ***3*** | ***1*** | ***4*** |
| ***2*** | ***4*** | ***3*** | ***1*** | ***6*** | ***1*** | ***0*** | ***2*** | ***4*** | ***1*** |
| ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***2*** | ***0*** | ***5*** | ***5*** | ***1*** | ***3*** | ***2*** |

* + - 1. Hãy lập bảng phân phối tần số và tần số tích lũy cho dữ liệu mẫu.
      2. Trên mẫu vừa nêu, tính SCTMGD trung bình độ lệch chuẩn của SCTMGD.

#### Giải

1. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số con trong một gia đình. Bảng phân bố tần số, tần suất và tần suất tích lũy cho X từ dữ liệu trên.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* |
| *Tần số* 𝑛𝑖 | *3* | *6* | *6* | *6* | *4* | *3* | *1* | *1* |
| *Tần suất*  𝑓𝑖 | *0,100* | *0,200* | *0,200* | *0,200* | *0,133* | *0,100* | *0,033* | *0,033* |
| *Tần suất*  *tích lũy* | *0,100* | *0,300* | *0,500* | *0,700* | *0,833* | *0,933* | *0,967* | *1,000* |

1. Giá trị trung bình mẫu là:

𝑥̅ = 2,67

Giá trị phương sai mẫu: 𝑠2 = 3,2644 Độ lệch chuẩn: *s* = 1,81

**Ví dụ 3** (Hà Bích Ngọc): Khối lượng trung bình khi xuất chuồng ở một trại chăn nuôi gà công nghiệp năm trước là 3,3 kg/con. Năm nay người ta sử dụng loại thức ăn mới. Sau một thời gian, cân thử 15 con khi xuất chuồng, có các số liệu sau: (đơn vị kg) 3,25; 2,50; 4,00; 3,75; 3,80; 3,90; 4,02;

3,60; 3,80; 3,20; 3,82; 3,40; 3,75; 4,00; 3,50,

Giả thiết khối lượng gà là biến ngẫu nhiên phân phối theo qui luật chuẩn với phương sai 0,04. Với mức ý nghĩa α = 0,05, hãy cho kết luận về tác dụng của loại thức ăn mới. **Giải**

Ta có bảng

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Cân nặng*  *(kg)* | *2,5* | *2,8* | *3,2* | *3,4* | *3,75* | *3,9* | *4,0* | *4,1* |
| *Số con* | *1* | *2* | *1* | *1* | *3* | *2* | *1* | *4* |

Gọi X là đại lượng ngẫu nhiên chỉ khối lượng gà khi xuất chuồng. Theo giả thiết X~N(a,0,04)

Ta có:

Kỳ vọng mẫu: ̅

1 ∑8

n X =3,628

X = .

n

i=1 i i

Phương sai mẫu: 2 1 ∑8 n X 2 − ̅X2 = 0,261

S = .

n i=1 i i

* + s’= 0,529

Nếu thức ăn mới có tác dụng tốt thì khối lượng trung bình của gà xuất chuồng năm nay sẽ cao hơn. Muốn kết luận về điều đó ta kiểm định giả thiết sau:

H0 ∶ a = a0 = 3,3 H1 ∶ a > a0 = 3,3

ở mức ý nghĩa α = 5%

Với α = 5% thì t(n−1;2α) = t(14;0,1) = 1,76

Lại có K

= X̅−a0 √n = 3,628−3,3 √15 = 2,401

qs s′

0,529

Ta thấy Kqs>t(n−1;2α) nên H0 bị bác bỏ.

Vậy khối lượng trung bình của gà xuất chuồng năm nay cao hơn năm trước, nghĩa là thức ăn mới có tác dụng tăng trọng lượng gà.

**Ví dụ 4** (Hà Bích Ngọc): Quan sát ở một mẫu, người ta có kết quả về chiều cao X(m) của loại cây công nghiệp ở một nông trường như sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 𝑋𝑖 *(m)* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* |
| *Số cây (*𝑛𝑖) | *2* | *8* | *23* | *32* | *23* |

1. Hãy ước lượng chiều cao trung bình của loài cây đó với độ tin cậy 90%.
2. Để ước lượng chiều cao trung bình của loại cây đó ở độ tin cậy 95%, với sai số không quá 2 dm thì cần phải quan sát thêm bao nhiêu cây nữa?

#### Giải

1. Các giá trị đặc trưng của mẫu là:

Kỳ vọng mẫu: ̅

1 ∑5

n X = 5,75

X = .

n

i=1 i i

Phương sai mẫu: 2 1 ∑5 n X 2 − ̅X2 = 1.028

S = .

n i=1 i i

Phương sai mẫu hiệu chỉnh: S′2 = n

n−1

. S2=1,04

* S’=1,02

Theo bài ra γ = 0,9 => Uγ

= Φ−1

γ

( + 0,5) = Φ

2

−1 (0,9 + 0,5) = 1,95

2

Khoảng tin cậy 90% cho chiều cao trung bình của loại cây đó là:

S′

a ∈ (̅X − Uγ.

√n

S′

; ̅X + Uγ. )

√n

Thay số vào biểu thức trên ta được

a ∈ (5,534; 5,966)

1. Giả sử n1 là số cây cần quan sát với độ tin cây 95% và sai số không quá 0,2m ta có

U = Φ−1 (0,95 + 0,5) = 1,96

γ 2

Theo bài ra: U .

σ

γ

√n

≤ 0,2 ⟺ 1,96. 1,04

√n1

≤ 0,2 ⟺ n1

≥ 103,87 ⟺ n1

≥ 104

Vậy cần quan sát ít nhất 104 cây nữa.

**Ví dụ 5** (Hà Bích Ngọc): Năng suất lúa trung bình của những vụ trước là 55 tấn/ha. Vụ lúa năm nay người ta áp dụng 1 phương pháp kỹ thuật mới cho toàn bộ diện tích trồng lúa trong vùng. Điều tra năng suất 100ha lúa, ta có bảng số liệu sau:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Năng*  *suất(tạ/ha)* | *40-45* | *45-50* | *50-55* | *55-60* | *60-65* | *65-70* | *70-75* | *75-80* |
| *Diện*  *tích(ha)* | *7* | *12* | *18* | *27* | *20* | *8* | *5* | *3* |

Với mức ý nghĩa là 1% hãy kết luận xem phương pháp kỹ thuật mới có làm tăng năng suất của lúa trung bình của vùng này hay không

#### Giải

Ta có bảng sau:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Xi* | *ni* | *niXi* | *niXi2* |
| *42,5* | *7* | *297,5* | *12643,75* |
| *47,5* | *12* | *570* | *27075* |
| *52,5* | *18* | *945* | *49612,5* |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *57,5* | *27* | *1552,5* | *89268,75* |
| *62,5* | *20* | *1250* | *78125* |
| *67,5* | *8* | *540* | *36450* |
| *72,5* | *5* | *362,5* | *26281,25* |
| *77,5* | *3* | *232,5* | *18018,75* |
|  | *n =100* | *5750* | *337475* |

Trung bình mẫu: 𝑋̅ = 1

𝑛

 niXi = 5750/100 = 57,5 (tạ)

Phương sai mẫu của X: S2 = 1

𝑛

niXi2 - 𝑋̅2 = 337475 - 57,52 = 68,5(tạ)

100



S = √S2 = 8,276472679

Giả thiết H0: a = a0= 55; H1: a1 ≠ 55 Vì n>30; σ2 chưa biết nên ta có:

K = 𝑋̅−𝑎0 √𝑛 − 1= 57,5−55 √99= 3,0078

𝑆

Ta có α = 0,01

8,27

𝑡(𝑛−1;𝛼) = 𝑡(99;0,01)= 2,33

Ta thấy |K| = 3,0078 < 2,33 => bác bỏ H0, chấp nhận H1

Vậy với mức ý nghĩa là 1% phương pháp kỹ thuật mới có làm tăng năng suất của lúa trung bình của vùng này

#### 3.1.3. PHƯƠNG SAI MẪU HIỆU CHỈNH

**Ví dụ 1** (Nguyễn Thị Thuý Dân): Phỏng vẫn ngẫu nhiên 15 sinh viên về chiều cao, thu được bảng số liệu sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 𝑥𝑖 (𝑐𝑚 ) | *152* | *157* | *158* | *160* | *165* |
| 𝑛𝑖 | *5* | *2* | *3* | *3* | *2* |

Tính trung bình mẫu.

#### Giải

Áp dụng công thức tính trung bình mẫu, ta được:

𝑥̅ = 1 ∑𝑘 𝑛 . 𝑥

𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖

= 1 . (5.152 + 2.157 + 3.158 + 3.160 +2.165)

15

= 157,2

Vậy trung bình mẫu là 157,2.

**Ví dụ 2** (Nguyễn Thị Thuý Dân): Quan sát điểm thi môn Toán cao cấp của 10 sinh viên được chọn ngẫu nhiên từ một lớp ta thu được các số liệu sau:

5; 6; 7; 4; 6; 9; 4; 5; 5; 7

Tính trung bình mẫu và phương sai hiệu chỉnh mẫu của mẫu này.

#### Giải

Từ các số liệu thu được ta lập được bảng số liệu sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 𝑥𝑖 | *4* | *5* | *6* | *7* | *9* |
| 𝑛𝑖 | *2* | *3* | *2* | *2* | *1* |

Trung bình mẫu là:

𝑥̅ = 1 ∑𝑘 𝑛 . 𝑥 = 1 .(4.2 + 5.3 + 6.2 + 7.2 + 9.1) = 5,8

𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖 10

Phương sai hiệu chỉnh mẫu của mẫu, ta có:

𝑠′2 = 1 ∑𝑘

𝑛 . (𝑥

− 𝑥̅ ) 2

𝑛−1

𝑖=1 𝑖 𝑖

= 1

10−1

2. (7 − 5,8) 2 + 1. (9 − 5,8) 2)

= 2,4

.( 2. (4 − 5,8) 2 + 3 . (5 − 5,8) 2 + 2. (6 − 5,8) 2 +

Vậy trung bình mẫu là 5,8; phương sai hiệu chỉnh mẫu là 2,4.

**Ví dụ 3** (Nguyễn Thị Thuý Dân): Thống kê doanh thu 1 tháng của 1 nhà hàng, thu được bảng số liệu sau:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Khoảng doanh thu*  *(triệu)* | *10 - 20* | *20 - 30* | *30 - 40* | *40 - 50* |
| *Số ngày* | *5* | *8* | *10* | *7* |

Tính trung bình mẫu, phương sai mẫu, phương sai hiệu chỉnh mẫu. Giải

Ta thay mỗi khoảng bằng giá trị trung tâm khoảng 𝑥𝑖 , từ đó ta có bảng sau:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Khoảng doanh thu*  *(triệu)* | *10 - 20* | *20 - 30* | *30 - 40* | *40 - 50* |
| 𝑥𝑖 | *15* | *25* | *35* | *45* |
| 𝑛𝑖 *(số ngày)* | *5* | *8* | *10* | *7* |

Trung bình mẫu:

𝑥̅ = 1 ∑𝑘 𝑛 . 𝑥 = 1 .(5.15 + 8.25 + 10.35 + 7.45) = 94 ≈

31,33

Phương sai mẫu:

𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖 30 3

𝑠2 = 1 ∑𝑘 𝑛 . (𝑥 − 𝑥̅ ) 2 = 1 ∑𝑘 𝑛 . 𝑥

2 - 𝑥̅ 2

𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖 𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖

Mà: 1 ∑𝑘 𝑛 . 𝑥 2 = 1

.(5. 15 2 + 8. 25 2 + 10. 35 2 + 7.

45 2) =1085

𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖 30

𝑥̅ 2 = (1 ∑𝑘

𝑛 . 𝑥 ) 2 =

94 2 = 8836

𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖 ( 3 ) 9

⇒ 𝑠2 = 1085 - 8836 = 929 ≈ 103,22

9 9

Phương sai hiệu chỉnh mẫu:

𝑠′2 = 1 ∑𝑘 𝑛 . (𝑥 − 𝑥̅ ) 2 = 𝑛

. 𝑠2 = 30

. 929

= 9290 ≈

106,78

𝑛−1

𝑖=1 𝑖 𝑖

𝑛−1

30−1 9 87

Vậy trung bình mẫu là 31,33; phương sai mẫu là 103,22; phương sai hiệu chỉnh mẫu là 106,87.

**Ví dụ 4** (Nguyễn Thị Thuý Dân): Đo lượng Protein huyết thanh của bệnh nhân mắc bệnh X ta thu được kết quả sau (đơn vị g/l):

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 6,5 | 7,1 | 7,6 | 7,9 | 8,3 | 9,0 | 8,3 | 9,0 |
| 7,1 | 6,5 | 9,0 | 7,6 | 7,9 | 8,3 | 6,5 | 7,9 |
| 7,9 | 8,3 | 7,9 | 6,5 | 7,1 | 7,6 | 7,6 | 8,3 |

8,3 8,3 7,6 7,1 8,3 7,9 7,1 8,3

1. Hãy thu gọn số liệu trên.
2. Tính trung bình mẫu và phương sai mẫu.

#### Giải

1. Số liệu sau khi được thu gọn ta lập được bảng sau:
2. Trung bình mẫu là:

𝑥̅ = 1 ∑𝑘 𝑛 . 𝑥 = 1 .(4.6,5 + 5.7,1 + 5.7,6 + 6.7,9 + 9.8,3 +

3.9,0) = 1243 ≈ 7,769

160

Phương sai mẫu là:

𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖 32

𝑠2 = 1 ∑𝑘 𝑛 . (𝑥 − 𝑥̅ ) 2 = 1 ∑𝑘 𝑛 . 𝑥

2 - 𝑥̅ 2

𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖 𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖

Mà: 1 ∑𝑘 𝑛 . 𝑥 2 = 1

.(4. 6,5 2 + 5. 7,1 2 + 5. 7,6 2 + 6.

𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖 32

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Giá trị (*𝑥𝑖 *)* | *6,5* | *7,1* | *7,6* | *7,9* | *8,3* | *9,0* |
| *Tần số (*𝑛𝑖) | *4* | *5* | *5* | *6* | *9* | *3* |

7,9 2 + 9. 8,3 2 + 3. 9,0 2) = 48683

800

𝑥̅ 2 = (1 ∑𝑘

𝑛 . 𝑥 ) 2 =

1243) 2 ≈ 60,3535

𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖

(

160

⇒ 𝑠2 = 48683 - (1243

)

2 ≈ 0,5

800 160

Vậy trung bình mẫu: 7,769; phương sai mẫu: 0,5.

**Ví dụ 5** (Nguyễn Thị Thuý Dân): Để kiểm tra độ chính xác của 1 thiết bị điện tử người ta đo ngẫu nhiên 1 số chi tiết của thiết bị đó và thu được bảng số liệu sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 𝑥𝑖 | *40* | *44* | *48* | *50* | *56* |
| 𝑛𝑖 *(số chi tiết máy)* | *5* | *20* | *7* | *10* | *8* |

Hãy tính độ lệch tiêu chuẩn mẫu có hiệu chỉnh.

#### Giải

Ta có công thức tính độ lệch tiêu chuẩn mẫu có hiệu chỉnh là:

𝑠′ = √𝑠′2 = √ 1 ∑𝑘 𝑛 . (𝑥

− 𝑥̅ ) 2

𝑛−1 𝑖=1 𝑖 𝑖

Mà: 𝑥̅ = 1 ∑𝑘 𝑛 . 𝑥 = 1 .(5.40 + 20.44 + 7.48 + 10.50 + 8.56) =

1182

25

𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖 50

𝑠′2 = 1 ∑𝑘 𝑛 . (𝑥

− 𝑥̅ ) 2 = 1 . (5. (40 − 1182

2 + 20.

𝑛−1 𝑖=1 𝑖 𝑖

)

50−1 25

(44 − 1182) 2 + 7. (48 − 1182)2 + 10. (50 − 1182) 2 + 8. (56 − 1182 ) 2)

25 25

25 25

≈ 23,798

Vậy độ lệch tiêu chuẩn mẫu có hiệu chỉnh 𝑠′ = √𝑠′2 = √23,798 ≈ 4,878.

* + 1. **CÁCH TÍNH** 𝑿 **VÀ** 𝑺𝟐
       1. **Trường hợp 1:** Nếu mẫu có đủ n giá trị khác nhau

**Ví dụ 1** (Nguyễn Thị Thuý Dân): Quan sát nhiệt độ các ngày trong tháng 7 ở Hà Tĩnh thu được bảng số liệu sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Nhiệt độ* 𝑥𝑖 | *36* | *37* | *37,5* | *38* | *38,5* |
| *Số ngày* 𝑛𝑖 | *3* | *5* | *5* | *11* | *6* |

Tính nhiệt độ trung bình của tháng đó.

#### Giải

Nhiệt độ trung bình của tháng đó ở Hà Tĩnh chính là trung bình mẫu, ta có:

𝑥̅ = 1 ∑𝑘

𝑛 . 𝑥

= 1 .(3.36 + 5.37 +5.37,5 + 11.38 +6. 38,5)

𝑛 𝑖=1 𝑖

𝑖 30

= 753

20

≈ 37,65

Vậy nhiệt độ trung bình tháng đó ở Hà Tĩnh là 37,65 độ.

**Ví dụ 2** (Nguyễn Thị Thuý Dân): Thông kê năng suất (tạ/năm) của 1 thửa ruộng qua các năm từ năm 2002 đến 2022 thu được các số liệu sau:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2.5 | 2.4 | 2.5 | 2.4 | 2.6 |
| 1.8 | 2 | 2.5 | 2.5 | 2.4 |
| 2.6 | 1.8 | 2 | 2.5 | 2.3 |
| 2 | 1.8 | 2.6 | 2.3 | 2. |

a, Lập bảng thu gọn số liệu trên.

b, Tính trung bình mẫu, phương sai mẫu, phương sai hiệu chỉnh mẫu.

#### Giải

1. Số liệu sau khi được thu gọn ta lập được bảng sau:
2. Trung bình mẫu là:

𝑥̅ = 1 ∑𝑘 𝑛 . 𝑥 = 1 .(3.1,8 + 4.2 + 2.2,3 +3.2,4 + 5.2,5 +

3.2,6) = 91 = 2,275

40

Phương sai mẫu là:

𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖 20

𝑠2 = 1 ∑𝑘 𝑛 . (𝑥 − 𝑥̅ ) 2 = 1 ∑𝑘 𝑛 . 𝑥

2 - 𝑥̅ 2

𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖 𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖

Mà: 1 ∑𝑘 𝑛 . 𝑥 2 = 1

.( 3.1,8 2 + 4.2 2 + 2.2,3 2 +

𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖 20

3.2,4 2 + 5.2,5 2 + 3.2,6 2) = 10511

2000

𝑥̅ 2 = (1 ∑𝑘

𝑛 . 𝑥 ) 2 = 91

2 = 8281

𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖 ( )

⇒ 𝑠2 = 10511 - 8281

= 639

40

≈ 0,0799

1600

Phương sai hiệu chỉnh mẫu:

𝑠′2 = 1

2000

𝑘

∑

1600

𝑛 . (𝑥

8000

− 𝑥̅ ) 2 = 𝑛

. 𝑠2 = 20

. 639

= 637 ≈

0,0838

𝑛−1

𝑖=1 𝑖 𝑖

𝑛−1

20−1

8000

7600

Vậy trung bình mẫu: 2,275; phương sai mẫu: 0,0799; phương sai hiệu chỉnh mẫu là:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Năng suất (*𝑥𝑖 *)* | *1,8* | *2* | *2,3* | *2,4* | *2,5* | *2,6* |
| *Số năm (*𝑛𝑖) | *3* | *4* | *2* | *3* | *5* | *3* |

0,0838.

**Ví dụ 3** (Nguyễn Thị Thuý Dân): Phỏng vẫn ngẫu nhiên 15 sinh viên về chiều cao, thu được bảng số liệu sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 𝑥𝑖 (𝑐𝑚 ) | *152* | *157* | *158* | *160* | *165* |
| 𝑛𝑖 | *5* | *2* | *3* | *3* | *2* |

Tính độ lệch tiêu chuẩn có hiệu chỉnh.

#### Giải

Ta có: Trung bình mẫu:

𝑥̅ = 1 ∑𝑘 𝑛 . 𝑥

𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖

= 1 . (5.152 + 2.157 + 3.158 + 3.160 +2.165)

15

= 157,2

Và phương sai mẫu hiệu chỉnh:

𝑠′2 = 1 ∑𝑘 𝑛 . (𝑥

− 𝑥̅ ) 2

𝑛−1 𝑖=1 𝑖 𝑖

= 1

15−1

.( 5. (152 − 157,2) 2 + 2 . (157 − 157,2) 2 +

3. (158 − 157,2) 2 + 3. (160 − 157,2) 2 + 2. (165 − 157,2) 2)

= 706

35

≈ 20,17

⇒độ lệch tiêu chuẩn mẫu có hiệu chỉnh là:

𝑠′ = √𝑠′2 = √ 1 ∑𝑘

𝑛 . (𝑥

− 𝑥̅ ) 2

= √706

≈ 4,49

𝑛−1

𝑖=1 𝑖 𝑖 35

Vậy độ lệch tiêu chuẩn mẫu có hiệu chỉnh: 4,49.

**Ví dụ 4** (Nguyễn Thị Thuý Dân): Cho bảng số liệu sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 𝑥𝑖 | *160* | *165* | *170* | *175* | *180* |
| 𝑛𝑖 | *3* | *2* | *5* | *4* | *6* |

Tính phương sai mẫu của mẫu trên.

#### Giải

Ta có công thức phương sai mẫu:

𝑠2 = 1 ∑𝑘

𝑛 . (𝑥

− 𝑥̅ ) 2

𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖

Mà 𝑥̅ = 1 ∑𝑘 𝑛 . 𝑥

𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖

= 1 .(3.160 + 2.165 + 5.170 + 4.175 + 6.180)

20

= 172

⇒ 𝑠2 = 1

20

. (3. (160 − 172) 2 + 2. (165 − 172) 2

+5. (170 − 172) 2 + 4. (175 − 172) 2 +6. (180 − 172) 2)

= 97

2

Vậy phương sai mẫu là 97.

2

**Ví dụ 5** (Nguyễn Thị Thuý Dân): Thống kê bảng điểm thi môn xác suất thống kê của 1 lớp gồm 40 người thu được bảng sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Đ𝑖ể𝑚 𝑥𝑖 | *4* | *6* | *8* | *9* | *10* |
| *Số người* 𝑛𝑖 | *9* | *8* | *15* | *5* | *3* |

Tính điểm số trung bình, phương sai mẫu của lớp.

#### Giải

Điểm số trung bình chính là trung bình mẫu, khi đó ta có:

𝑥̅ = 1 ∑𝑘 𝑛 . 𝑥 = 1 .(9.4+ 8.6+ 15.8 +5.9 + 3.10) = 279 =

6,975

Phương sai mẫu là:

𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖 40 40

𝑠2 = 1 ∑𝑘 𝑛 . (𝑥 − 𝑥̅ ) 2 = 1 ∑𝑘 𝑛 . 𝑥

2 - 𝑥̅ 2

𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖 𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖

Mà: 1 ∑𝑘 𝑛 . 𝑥 2 = 1

.( 9.4 2 + 8.6 2 + 15.8 2 + 5.9 2

+ 3.10 2 ) = 2097

40

𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖 40

𝑥̅ 2 = (1 ∑𝑘

𝑛 . 𝑥 ) 2 =

279 ) 2

𝑛 𝑖=1 𝑖 𝑖 ( 40

⇒ 𝑠2 = 2097 -

40

( ) ≈ 3,774

40

279 2

Vậy điểm số trung bình là 6,975; phương sai mẫu là 3,774.

* + - 1. **Trường hợp 2:** Nếu mẫu có *k* giá trị khác nhau (𝑥1, 𝑥2, … 𝑥𝑘), 𝑚ỗ𝑖 𝑔𝑖á 𝑡𝑟ị 𝑥𝑖

xuất hiện với tần số 𝑛𝑖 , 𝑥𝑖 theo thứ tự tăng dần.

**Ví dụ 1**(Lê Văn Dương): Quan sát ở một mẫu, người ta có kết quả về chiều cao X(m)

của loại cây công nghiệp ở một nông trường như sau:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X(m)* | *8* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Số cây* | *12* | *2* | *8* | *23* | *32* | *23* |

a, Hãy ước lượng chiều cao trung bình của loại cây đó với độ tin cậy 90%

b, Những cây cao từ 7m trở lên gọi là loại A. Hãy tìm khoảng tin cậy 95,44% cho tỉ lệ cây loại A của nông trường

#### Giải:

a, Kỳ vọng mẫu: ̅X = 1 ∑𝑛 x n = 6,02

𝑛 𝑘=0 i i

Phương sai mẫu : 2 1 𝑛 n x2 – ̅X2 = 1,45

𝑆 = ∑

=> S = 1,2059

𝑛 𝑘=0 i i

Vì n > 30, σ chưa biết nên ta có công thức ước lượng khoảng cho kỳ vọng:

𝑎 ∈ (𝑥̅ − 𝑈γ

. 𝑆

√𝑛

; 𝑥̅ + 𝑈γ

. 𝑆 )

√𝑛

Trong đó γ = 90% => 𝑈γ

= 𝚽−𝟏

γ

( + 0,5) = 𝚽

2

−𝟏(0,95) = 1,65

=> 𝑎 ∈ (6,02 -1,65. 1,2059; 6,02 +1,65. 1,2059) = (5,82;6,22)

√100

b,

√100

Tỷ lệ cây loại A trên mẫu là: 𝑓 = 35

100

= 0,35

P là tỉ lệ cây loại A của nôn trường trong 100 cây

Với độ tin cậy 95,44% 𝑈γ

= 𝚽−𝟏

γ

( + 0,5) = 𝚽

2

−𝟏(0,9772) = 2

* 𝑃 ∈ (𝑓 − 𝑈γ

. √f(1−f)

n

; 𝑓 + 𝑈γ

. √f(1−f)

n

)

* 𝑃 ∈ (0,35 − 2. √0,35.0,65 ; 0,3 + 2. √0,35.0,65)

100

* 𝑃 ∈ (0,2546; 0,4454)

100

Vậy với độ tin cậy 95,44% có thể nói tỷ lệ cây loại A là từ 25,46% đến 44,54% **Ví dụ 2**(Lê Văn Dương): Để nghiên cứu sản lượng sữa hàng ngày của một ñàn bò, người ta ñiều tra ngẫu nhiên trên 100 con bò của nông trường và có kết quả sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X(kg)* | *9* | *10* | *12* | *14* | *15* |
| *Số con* | *10* | *24* | *42* | *16* | *8* |

Ước lượng sản lượng sữa trung bình của mỗi con với độ tin cậy 94%

#### Giải:

Ta có n = 100

Kỳ vọng mẫu của X là :

Phương sai mẫu của X là :

𝑛

: ̅X = 1 ∑ x n

𝑛 i i

𝑘=0

= 11,78

𝑛

𝑆2 = 1 ∑ n x2 – ̅X2 = 3,1716

𝑛 i i

𝑘=0

Phương sai mẫu hiệu chỉnh của X là :

𝑆′2 = 𝑛

𝑛 − 1

𝑆2 = 3,2036 => 𝑆′ = 1,7898

Có γ = 1 - α = 94% = 0,94

Vì n = 100 > 30, σ chưa biết nên ta có công thức ước lượng khoảng cho kỳ vọng :

𝑎 ∈ (𝑥̅ − 𝑈γ

. 𝑆

√𝑛

; 𝑥̅ + 𝑈γ

. 𝑆 )

√𝑛

Trong đó 𝑈γ

= 𝚽−𝟏

γ

( ) = 𝚽

2

−𝟏(0,47) = 1,88 (tra bảng giá trị hàm Laplace)

=> 𝑎 ∈ (11,78 -1,88. 1,7898; 11,78 +1,88. 1,7898) = (11,4435;12,1164)

√100 √100

Vậy với độ tin cậy 94% sản lượng trung bình của một con bò là từ 11,4435 đến 12,1164 lít

**Ví dụ 3**(Lê Văn Dương): Mức tiêu hao nguyên liệu cho một đơn vị sản phẩm là một biến ngẫu nhiên X. Quan sát 28 sản phẩm ñược chọn ngẫu nhiên, người ta thu được kết quả cho trong bảng sau:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X(g)* | *19* | *19,5* | *20* | *20,5* |
| *Số SP* | *5* | *6* | *14* | *3* |

Tính mức tiêu hao trung bình của mỗi sản phẩm.

#### Giải:

Mức tiêu hao trung bình chính là kỳ vọng mẫu:

̅X = 1 ∑𝑛 x n = 1

(19.5 + 19,5.6 + 20.14 + 20,5.3) = 19,7678

𝑛 𝑘=0 i i 28

Vậy mức tiêu hao trung bình là 19,7678g

**Ví dụ 4**(Lê Văn Dương): Một máy sản xuất tự động có tỉ lệ sản xuất ra sản phẩm loại

A. Máy được cải tiến và sau một thời gian áp dụng, người ta kiểm tra 40 hộp, mỗi hộp gồm 10 sản phẩm và ghi lại số sản phẩm loại A trong mỗi hộp (SSPLA/h) như sau:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X(sp)* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* |
| *Số hộp* | *2* | *0* | *4* | *6* | *8* | *10* | *4* | *5* | *1* | *0* |

Tính số sản phẩm loại A trung bình mỗi hộp.

#### Giải:

Số sản phẩm loại A trung bình mỗi hộp chính là kỳ vọng mẫu:

̅X = 1 ∑𝑛 x n = 1

(1.2 + 2.0 + 3.4 + 4.6 + 5.8 + 6.10 + 7.4 + 8.5 + 9.1 +

𝑛 𝑘=0 i i 40

10.0) = 5,375

Vậy số sản phẩm loại A trung bình mỗi hộp là 5,375

**Ví dụ 5**(Lê Văn Dương): Một công ty sản xuất bột giặt muốn thăm dò mức độ tiêu thụ sản phẩm này trong thành phố H. Công ty tiến hành ñiều tra 500 hộ gia đình và có kết quả sau:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Nhu*  *cầu(kg)* | *1* | *1,5* | *2* | *2,5* | *3* | *3,5* | *4* |
| *Số hộ* | *21* | *147* | *192* | *78* | *34* | *16* | *12* |

Tính lượng bôt giặt trung bình mỗi gia đình sử dụng trong một tháng.

#### Giải:

Lượng bột giặt trung bình mỗi hộ sử dụng mỗi tháng chính là kỳ vọng mẫu:

𝑛

̅X = 1 ∑ x n

𝑛 i i

𝑘=0

1

=

500

(1.21 + 1,5.147 + 2.192 + 2,5.78 + 3.34 + 3,5.16 + 4.12)

= 2,053

Vậy lượng bột giặt trung bình mỗi gia đình sử dụng trong 1 tháng là 2,053kg.

**3.1.4.3. Trường hợp 3:** Nếu kích thước mẫu lớn, việc tính 𝑛𝑖𝑥𝑖; 𝑛𝑖𝑥𝑖 2 phức tạp thì ta chọn 𝑥0 là số 𝑥𝑗 nào đó mà 𝑛𝑗 là lớn nhất

**Ví dụ 1** ( Bùi Vũ Huyền Linh): Để khảo sát trọng lượng X của một loại vật nuôi trong nông trại, người ta quan sát một mẫu và có kết quả sau:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X(kg)* | *36* | *42* | *48* | *54* | *60* | *66* | *72* |
| *Số con* | *15* | *12* | *25* | *18* | *10* | *10* | *10* |

Ước lượng trọng lượng trung bình của loại vật nuôi trên với độ tin cậy 96%.

#### Giải

Ta có:

N=100 ; ∑ 𝑋𝑖𝑛𝑖 = 5196 ; ∑ 𝑋𝑖2 𝑛𝑖 = 282096

Kỳ vọng mẫu của X là:

̅ 1

Phương sai mẫu của X là:

𝑋 = 𝑛 ∑ 𝑋𝑖2 𝑛𝑖 = 51,96𝑘𝑔

2 1 ̅2 2

𝑠 = 𝑛 ∑ 𝑋𝑖2 𝑛𝑖 − 𝑋 = (11,0054)

𝑘𝑔

Phương sai mẫu hiệu chỉnh của X là:

𝑠2 = 𝑛

𝑛 − 1

̅𝑆̅2̅ = (11,0608)2𝑘𝑔

Tỷ lệ mẫu con đạt tiêu chuẩn là:

𝑚

𝐹 =

𝑛

= 0,3

Vì trong n = 100 con có m= 10+10+10=30 con có trọng lượng từ 60kg trở lên, nghĩa là có 30 con đạt tiêu chuẩn.

Đây là bài toán ước lượng khoảng cho kỳ vọng 𝜇 = 𝑀(𝑋)với độ tin cậy 𝛾 = 1 − 𝛼 = 96% = 0,96

Vì 𝑛 ≥ 30, 𝛿2 = 𝐷(𝑋)chưa biết nên ta có công thức ước lượng khoảng cho kỳ vọng

(𝑋̅ ∓ 𝑍

𝑆 )

𝛼 √𝑛

Trong đó 𝜔(𝑍 ) 𝛾 0,96 = 0,48. Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được 𝑧

= 2,06.

𝛼 = = 2 𝛼

2

Vậy ước lượng khoảng là:

(51,96 - 2,0611,0608, 51,96 + 2,0611,0608) = (49.68; 54,24)

√100 √100

Nói cách khác, với độ tin cậy 96% trọng lượng trung bình của một con nằm trong khoảng 49,08kg đến 54,24kg.

**Ví dụ 2** ( Bùi Vũ Huyền Linh): Để ước lượng mức xăng tiêu hao trung bình cho một loại ô tô chạy từ A đến B, người ta quan sát mức xăng tiêu hao(X lít) của 30 chuyến xe và thu được kết quả như sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | *9* | *9-9,2* | *9,2-9,4* | *9,4-9,6* | *9,6* |
| *Số chuyến* | *4* | *6* | *12* | *5* | *3* |

Giả sử X có phân bổ chuẩn. Với độ tin cậy 95% mức xăng tiêu hao trung bình nằm trong khoảng nào?

#### Giải

Ta có: n=30, 𝑋̿ = 9,28 , 𝑆 = 0,227

Vì X có phân bố chuẩn và chưa biết DX nên khoảng tin cậy cho EX với độ tin cậy 95% là:

(𝑋̅ ± 𝑡

𝛼 𝑠

)=(9,194;9,366)

−1 (2) √𝑛−1

**Ví dụ 3** ( Bùi Vũ Huyền Linh ) Để ước lượng lượng gỗ trong một khu rừng người ta tiến hành khai thác 50 cây gỗ và đo được số liệu sau, với độ tin cậy 95%

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Khối lượng gỗ (m2)* | *20* | *40* | *60* | *80* |
| *Số cây* | *10* | *15* | *17* | *8* |

Ước lượng trữ lượng gỗ trung bình trong một khu vườn

#### Giải

C:\Users\Admin\AppData\Local\Microsoft\Windows\Clipboard\HistoryData\{7EDA9CC9-905B-4BD9-97F4-89A48B03A27F}\{601678FF-537E-4BE0-9D65-F9A0E9D708C6}\ResourceMap\{23636740-DA3F-4F8B-9296-86A791F3BC0E}

𝑘

1

𝑋 = 𝑛 . ∑ 𝑛𝑖 . 𝑋𝑖

𝑖=1

20 × 10 + 40 × 15 + 60 × 17 + 80 × 8

=

50

= 49,2

𝑘

𝑆2 = 1 . ∑ 𝑛 . 𝑋2 − 𝑋2

𝑛 𝑖 𝑖

𝑖=1

202 × 10 + 402 × 15 + 602 × 17 + 802 × 8

=

50

− 49,22 = 387,36

𝑆′2 = 𝑛

𝑛 − 1

𝑆2 = 50 × 387,36 = 395,27

49

=> 𝑆′ = 19,88

Khoảng ước lượng gỗ trung bình trong một khu vườn là

C:\Users\Admin\AppData\Local\Microsoft\Windows\Clipboard\HistoryData\{7EDA9CC9-905B-4BD9-97F4-89A48B03A27F}\{277BF5B9-C235-490D-9D1D-61CE077C906E}\ResourceMap\{EDB36177-5118-449B-9B20-DA992FF6F459}

19,88 19,88

= (49,2 − 1,96 × ; 49,2 + 1,96 × )

= (43,7; 54,71)

√50

√50

**Ví dụ 4 (** Bùi Vũ Huyền Linh**)** Tiến hành đo chiều cao của 35 cây thông được x (trung bình) = 8,06. Giả sử

X~N(a; 64). Với độ tin cậy bằng 95% có thể nói chiều cao cây thông thuộc khoảng nào

#### Giải

Với độ tin cậy γ = 95% thì Ur = ϕ-1 (0,95 ) = ϕ-1 (0,95 + 0,5) = 1,96

2 2

Khoảng tin cậy cho chiều cao trung bình E(X) = α = µ của cây thông là:

µ € (8,06 – 1,96. 0,8 ; 8,06 + 1,96. 0,8

) = (7,80; 8,32)

√35 √35

**Ví dụ 5** (Bùi Vũ Huyền Linh) Quan sát ở một mẫu, người ta có kết quả về chiều cao X(m) của loại cây công nghiệp ở một nông trường như sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 𝑋𝑖 *(m)* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* |
| *Số cây (*𝑛𝑖) | *2* | *8* | *23* | *32* | *23* |

1. Hãy ước lượng chiều cao trung bình của loài cây đó với độ tin cậy 90%.
2. Để ước lượng chiều cao trung bình của loại cây đó ở độ tin cậy 95%, với sai số không quá 2 dm thì cần phải quan sát thêm bao nhiêu cây nữa?

#### Giải

* 1. Các giá trị đặc trưng của mẫu là:

Kỳ vọng mẫu: ̅

1 ∑5

n X = 5,75

X = .

n

i=1 i i

Phương sai mẫu: 2 1 ∑5 n X 2 − ̅X2 = 1.028

S = .

n i=1 i i

Phương sai mẫu hiệu chỉnh: S′2 = n

n−1

. S2=1,04

* + - S’=1,02

Theo bài ra γ = 0,9 => Uγ

= Φ−1

γ

( + 0,5) = Φ

2

−1 (0,9 + 0,5) = 1,95

2

Khoảng tin cậy 90% cho chiều cao trung bình của loại cây đó là:

S′

a ∈ (̅X − Uγ.

√n

S′

; ̅X + Uγ. )

√n

Thay số vào biểu thức trên ta được

a ∈ (5,534; 5,966)

* 1. Giả sử n1 là số cây cần quan sát với độ tin cây 95% và sai số không quá 0,2m ta có

U = Φ−1 (0,95 + 0,5) = 1,96

γ 2

Theo bài ra: U .

σ

γ

√n

≤ 0,2 ⟺ 1,96. 1,04

√n1

≤ 0,2 ⟺ n1

≥ 103,87 ⟺ n1

≥ 104

Vậy cần quan sát ít nhất 104 cây nữa.

# CHƯƠNG 4: ƯỚC LƯỢNG THAM SỐ CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

#### 4.1. ƯỚC LƯỢNG ĐIỂM

**Ví dụ 1**(Phạm Quang Kiên) Để ước lượng chiều cao trung bình của một loại cây , người ta chọn ngẫu nhiên từ khu rừng ra 100 cây và đo chiều cao của nó thì thu được số liệu

như sau: 𝑋 = 21,5 𝑚; 𝑆′ = 1,25𝑚.Với độ tin cậy 𝛾 = 98%, hãy ước lương chiều cao trung bình tối đa của loại cây lấy gỗ đó,.

#### Giải

Gọi X là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn chỉ chiều cao của loại cây lấy gỗ đó. E(X) là chiều cao trung bình của nó.

Ta có: 𝛾 = 98% → 𝑈𝛾

= Φ−1

𝛾

( + 0,5) = Φ

2

−1(0,99) = 2,33 và n=100

Khoảng ước lượng chiều cao trung bình tối đa của loại cây lấy gỗ đó là

E(X) ∈ (𝑋 − 𝑈

𝑆𝘍 ; 𝑋 + 𝑈

𝑆𝘍 )

𝛾 √𝑛 𝛾 √𝑛

= (21,5 − 2,33. 1,25 ; 21,5 + 2,33. 1,25 ) = (21,20875; 21,79125)

√100 √100

**Ví dụ 2**(Phạm Quang Kiên) . Đo chiều cao (đơn vị: cm) của 200 thanh niên trong một vùng ta thu được số liệu.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Chiều cao* | *155* | *160* | *165* | *170* | *175* |
| *Số thanh niên* | *30* | *50* | *60* | *50* | *10* |

Với độ tin cậy 95%, hãy ước lượng chiều cao trung bình của thanh niên khu vực trên.

#### Giải

Gọi X là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn chỉ chiều cao của các thanh niên E(X) là chiều cao trung bình của thanh niên.

Ta có: 𝛾 = 95% → 𝑈𝛾

= Φ−1

𝛾

( + 0,5) = Φ

2

−1(0,975) = 1,96

𝑘

1

𝑋 = 𝑛 . ∑ 𝑛𝑖 . 𝑋𝑖

𝑖=1

155 × 30 + 160 × 50 + 165 × 60 + 170 × 50 + 175 × 10

=

200

= 164

𝑘

𝑆2 = 1 . ∑ 𝑛 . 𝑋2 − 𝑋2

𝑛 𝑖 𝑖

𝑖=1

1552 × 30 + 1602 × 50 + 1652 × 60 + 1702 × 50 + 1752 × 10

=

200

− 1642

= 31,5.

𝑆′2 = 𝑛

𝑆2 = 200 × 31,5 = 6300

𝑛 − 1

199

199

=> 𝑆′ = √6300 = 5,627

199

Khoảng ước lượng chiều cao trung bình của thanh niên khu vực trên là

E(X) ∈ (𝑋 − 𝑈𝛾

𝑆′

; 𝑋 + 𝑈𝛾

√𝑛

5,627

𝑆′

)

√𝑛

5,627

= (164 − 1,96 × ; 164 + 1,96 × )

√200

= (163,2201376; 164,7798624)

√200

**Ví dụ 3(**Phạm Quang Kiên) Mức tiêu hao nhiên liệu cho một loại động cơ trong mỗi ca sản xuất là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Người ta theo dõi 100 động cơ và thu được các số liệu sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Lượng tiêu hao* | 20 − 22 | 22 − 24 | 24 − 26 | 26 − 28 | 28 − 30 |
| *Số động cơ* | *15* | *25* | *30* | *20* | *10* |

Ước lượng mức tiêu hao nhiên liệu trung bình của một động cơ trong 1 ca với độ tin cậy 95%

#### Giải

Gọi X là mức tiêu hao nguyên liệu cho loại động cơ trong mỗi ca sản suất E(X) là mức tiêu hao nguyên liệu trung bình

Chuyển bảng về dạng điểm

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Lượng tiêu hao* | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 |
| *Số động cơ* | *15* | *25* | *30* | *20* | *10* |

Ta có: 𝛾 = 95% → 𝑈𝛾

= Φ−1

𝛾

( + 0,5) = Φ

2

−1(0,975) = 1,96

𝑘

1

𝑋 = 𝑛 . ∑ 𝑛𝑖 . 𝑋𝑖

𝑖=1

21 × 15 + 23 × 25 + 25 × 30 + 27 × 20 + 29 × 10

=

=24,7

100

𝑘

𝑆2 = 1 . ∑ 𝑛 . 𝑋2 − 𝑋2

𝑛 𝑖 𝑖

𝑖=1

212 × 15 + 232 × 25 + 252 × 30 + 272 × 20 + 292 × 10

=

100

− 24,72

=5,71

𝑆′2 = 𝑛

𝑛 − 1

𝑆2 = 100 × 5,71 = 5,77

99

=> 𝑆′ = √5,77 = 2,402

Khoảng ước lượng mức tiêu hao nhiên liệu trung bình một động cơ trong 1 ca

E(X) ∈ (𝑋 − 𝑈𝛾

𝑆′

; 𝑋 + 𝑈𝛾

√𝑛

2,402

𝑆′

)

√𝑛

2,402

= (24,7 − 1,96 × ; 24,7 + 1,96 × )

√100

= (24,229; 25,171)

√100

**Ví dụ 4**(Phạm Quang Kiên) Điều tra năng suất của 100 ha lúa trong một vùng có kết quả như sau

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Năng suất (tạ/ha)* | 40 − 50 | 50 − 60 | 60 − 70 | 70 − 80 |
| *Số ha* | *10* | *40* | *30* | *20* |

Với độ tin cậy 95%, hãy ước lượng năng suất trung bình tối đa của giống lúa nói trên.

#### Giải

Gọi X là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn chỉ năng suất của giống lúa E(X) là năng suất trung bình của giống lúa.

Chuyển bảng về dạng điểm

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Năng suất (tạ/ha)* | 45 | 55 | 65 | 75 |
| *Số ha* | *10* | *40* | *30* | *20* |

C:\Users\Admin\AppData\Local\Microsoft\Windows\Clipboard\HistoryData\{7EDA9CC9-905B-4BD9-97F4-89A48B03A27F}\{601678FF-537E-4BE0-9D65-F9A0E9D708C6}\ResourceMap\{23636740-DA3F-4F8B-9296-86A791F3BC0E}

𝑘

1

𝑋 = 𝑛 . ∑ 𝑛𝑖 . 𝑋𝑖

𝑖=1

45 × 10 + 55 × 40 + 65 × 30 + 75 × 20

=

100

= 61

𝑘

𝑆2 = 1 . ∑ 𝑛 . 𝑋2 − 𝑋2

𝑛 𝑖 𝑖

𝑖=1

452 × 10 + 552 × 40 + 652 × 30 + 752 × 20

=

100

− 612 = 84

𝑆′2 = 𝑛

𝑆2 = 100 × 84 = 2800

𝑛 − 1 99 33

=> 𝑆′ = √2800 = 9,211

33

Khoảng ước lượng năng suất trung bình tối đa của giống lúa trên là

E(X) ∈ (𝑋 − 𝑈𝛾

𝑆′

; 𝑋 + 𝑈𝛾

√𝑛

9,211

𝑆′

)

√𝑛

9,211

= (61 − 1,96 × ; 61 + 1,96 × ) = (59,194644; 62,805356)

√100 √100

**Ví dụ 5**(Phạm Quang Kiên) Theo dõi thời gian hoàn thành 1 sản phẩm của 100 công nhân có được kết quả sau 𝑋 = 4,52; 𝑆 = 3,21.Tìm khoảng ước lượng cho thời gian trung bình để hoàn thành 1 sản phẩm với độ tin cậy 95%

#### Giải

C:\Users\Admin\AppData\Local\Microsoft\Windows\Clipboard\HistoryData\{7EDA9CC9-905B-4BD9-97F4-89A48B03A27F}\{601678FF-537E-4BE0-9D65-F9A0E9D708C6}\ResourceMap\{23636740-DA3F-4F8B-9296-86A791F3BC0E}Gọi X là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn chỉ thời gian hoàn thành 1 sản phẩm E(X) là thời gian trung bình để hoàn thanh 1 sản phẩm

𝑆′2 = 𝑛

𝑛−1

𝑆2 = 100 × 3,212 = 10,408

99

=> 𝑆′ = 3,226

Khoảng ước lượng cho thời gian trung bình để hoàn thành 1 sản phẩm là

E(X) ∈ (𝑋 − 𝑈𝛾

𝑆′

; 𝑋 + 𝑈𝛾

√𝑛

3,226

𝑆′

)

√𝑛

3,226

= (4,52 − 1,96 × ; 4,52 + 1,96 × )

√100

= (3,887704; 5,152296)

√100

#### ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG TIN CẬY

* + 1. **ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CHO KỲ VỌNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN**

**Ví dụ 1** (Trương Thị Bích): Hãy ước lượng giá trị tối thiểu và giá trị tối đa của mức thu nhập trung bình trong vùng với độ tin cậy 99%

#### Giải:

Ta có độ tin cậy 1 – α = 99%, α = 0,01 Tra bảng ta có: uα = u0,01 = 2,33

Ước lượng giá trị tối thiểu:

µ € (11,672 - 0,2 .2,33); +∞) = (11,579; +∞)

√25

Ước lượng giá trị tối đa:

µ € (-∞; 11,672 + 0,2 .2,33) = (-∞; 11,765)

√25

**Ví dụ 2** (Trương Thị Bích): Biết tuổi thọ của một loại bóng đèn hình TV có phân phối chuẩn độ lệch chuẩn bằng 500, nhưng chưa biết trung bình. Giá trị trung bình mẫu bằng 8900 được tính trên mẫu cỡ n = 35 . Hãy tìm khoảng tin cậy 95% cho tuổi thọ trung bình của loại bóng đèn hình đang khảo sát.

#### Giải:

Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ tuổi thọ của loại bóng đèn đó, X~N (µ;5002). Khoảng tin cậy 95% cho tuổi thọ trung bình của bóng đèn hình:

(x ̅ – e; x ̅ + e), với x ̅ = 8900 vì γ = 1 – α = 0,95 => α = 0,05 => α/2 = 0,025)

σ 0,500 500

ε = Zα. = Z0,025. = 1,96. = 165,65

2 √n

√35

√35

Vậy khoảng tin cậy cần tìm là: (8734; 9066) giờ

**Ví dụ 3** (Trương Thị Bích): Điều tra thu nhập (triệu/ năm) hằng năm của 25 hộ gia đình trong vùng ta có bảng:

|  |  |
| --- | --- |
| Thu nhập | Số hộ |
| 11,5 | 5 |
| 11,6 | 8 |
| 11,7 | 4 |
| 11,8 | 6 |
| 11,9 | 1 |
| 12 | 1 |

Hãy ước lượng mức thu nhập trung bình trong vùng với độ tin cậy 95% biết rằng thu nhập là biến ngẫu nhiên có po chuẩn với độ lệch chuẩn = 0,2

#### Giải:

Gọi X là biến ngẫu nhiên thu nhập hộ gia đình trong vùng, ta có: X~N (µ;0,22).

Từ đó x = 11,672, ϕ0(uα) = 1 - α

2 2

= 0,975; u0,025 = 1,96.

Vậy khoảng ước lượng của thu nhập trunh bình µ là:

µ € (11,672 - 0,2 .1,96; 11,672 + 0,2 .1,96) = (11,594; 11,75)

√25 √25

**Ví dụ 4** (Trương Thị Bích): Tiến hành đo chiều cao của 35 cây thông được x (trung bình) = 8,06. Giả sử

X~ N(a; 64). Với độ tin cậy bằng 95% có thể nói chiều cao cây thông thuộc khoảng nào

#### Giải:

Với độ tin cậy γ = 95% thì Ur = ϕ-1 (0,95 ) = ϕ-1 (0,95 + 0,5) = 1,96

2 2

Khoảng tin cậy cho chiều cao trung bình E(X) = α = µ của cây thông là:

µ € (8,06 – 1,96. 0,8 ; 8,06 + 1,96. 0,8

) = (7,80; 8,32)

√35 √35

**Ví dụ 5** (Trương Thị Bích): Khảo sát về thu nhập của một số người trong công ty ta có các số liệu sau:

|  |  |
| --- | --- |
| Thu nhập(Trđ/th) | Số người |
| 6 - 10 | 4 |
| 10 - 12 | 16 |
| 12 - 14 | 25 |
| 14 - 16 | 30 |
| 16 - 18 | 26 |
| 18 - 20 | 20 |

Những có thu nhập trên 15tr đồng /tháng là những người có thu nhập cao .ước lượng thu nhập trung bình của những người có thu nhập cao với độ tin cậy 90%

#### Giải:

Ta lập bảng:

|  |  |
| --- | --- |
| Thu nhập | Số người |
| 19 | 20 |
| 21 | 20 |
| 25 | 8 |

Khi đó n = 48, Σn x1 = 1000, Σn x2 = 21040; x̅ = 20,8333; S’2 ≈ 4,3972; S’ ≈ 2,097

i i i i

Với độ tin cậy γ = 1 – α = 90% => Uγ = 1,65

ε = 1,65.2,097 ≈ 0,4994

√48

Khoảng tin cậy của những người có thu nhập cao là: (20,43339; 21,3327)

#### ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CHO XÁC SUẤT (TỈ LỆ)

**Ví dụ 1** ( Bùi Vũ Huyền Linh) : Trước kỳ bầu cử tổng thống người ta phỏng vấn ngẫu nhiên 1800 cử tri thì thấy có 1180 người ủng hộ cử tri B. Với độ tin cậy 96%, hỏi ứng cử viên B có thể thu được tối thiểu bao nhiêu phần trăm số phiếu bầu?

#### Giải

Với mẫu thu được, ta có: Cơ mẫu n=1800

Tỷ lệ mẫu số người ủng hộ là:

𝑚 1180

𝐹𝑛 =

= = 0,6556

𝑛 1800

Với độ tin cậy 99%, để ứng cử viên A có thể thu được tối thiểu bao nhiêu % số phiếu bầu ta cần ước lượng khoảng bên phải cho tỷ lệ p những người ủng hộ với độ tin cậy

𝛾 = 1 − 𝛼 = 94% = 0,94(𝛼 = 0,06)

𝐹𝑛 (1 − 𝐹𝑛)

Trong đó: 𝜑(𝑧

(𝐹𝑛 − 𝑧2𝛼√

= 1−2𝛼 = 𝛾 = 0,88 = 0,44

; +∞)

𝑛

2𝛼

2 2 2

Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được 𝑧2𝛼 = 1,56. Suy ra giá trị tối thiểu của tỷ lệ người ủng hộ là:

𝐹 − 𝑧 √𝐹𝑛(1−𝐹𝑛) =0,44 – 1,56√0,44(1−0,44) = 0,4211

𝑛 2𝛼 𝑛

1800

Như vậy, với độ tin cậy 94%, ứng cử viên A có thể thu được tối thiểu là 42,11% số phiếu bầu.

**Ví dụ 2** ( Bùi Vũ Huyền Linh) : Để biết số lượng cá trong hồ lớn người ta bắt lên 2000 con đánh dấu rồi thả chúng xuống hồ. Sau đó người ta bắt lên 400 con và thấy có 80 con được đánh dấu. Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng số cá có trong hồ.

#### Giải

Gọi N là số cá có trong hồ. Khi đó tỷ lệ cá được đánh dấu có trong hồ là p=2000/N. Với mẫu thu được, ta có:

Cơ mẫu n=400

Số con đánh được trong mẫu là: m=80 Tỷ lệ mẫu con được đánh dấu là:

𝐹𝑛= m/n =80/400=0,2.

Với độ tin cậy 95%, trước hết ta ước lượng khoảng tỷ lệ p các con dược đánh dấu với độ tin cậy 𝛾 = 1 − 𝛼 = 95% = 0,95

Ta có công thức ước lượng khoảng:

𝐹𝑛(1 − 𝐹𝑛) 𝐹𝑛(1 − 𝐹𝑛)

(𝐹𝑛 − 𝑧𝛼√ 𝑛 ; 𝐹𝑛 + 𝑧𝛼√ 𝑛 )

Trong đó 𝜑(𝑧 = 1−𝛼 = 𝛾 = 0,95 = 0,475

𝛼 2 2 2

Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được 𝑧𝛼 = 1,96. Vậy ước lượng khoảng là:

(0,2 ± 1,96√0,2(1−0,2) = (16,08%; 23,92%)

)

400

Như vậy, với độ tin cậy 95% tỷ lệ con được đánh dấu nằm trong khoảng từ 16,08% đến 23,92%, do đó:

16,08% ≤

2000

2000

𝑁

≤ 23,92%

2000

↔

23,92%

≪ 𝑁 ≤

16,08%

↔ 8361,20 ≤ 𝑁 ≤ 12437,81 ↔ 8362 ≤ 𝑁 ≤ 12437

Vậy với độ tin cậy 95%, ta ước lượng số có có trong hồ khoảng từ 8362 đến 12437 con. **Ví dụ 3** ( Bùi Vũ Huyền Linh) : Để biết số lượng cam trong giỏ người ta bỏ ra 2000 quả đánh dấu rồi bỏ chúng vào giỏ. Sau đó người ta nhặt lên 400 quả và thấy có 80 quả được đánh dấu. Ước lượng số cam tối đa với độ tin cậy 96%.

#### Giải

Gọi N là số cam có trong giỏ. Khi đó tỷ lệ cam được đánh dấu có trong giỏ là p=2000/N.

Với mẫu thu được, ta có:

Cơ mẫu n=400

Số quả cam đánh dấu được trong mẫu là: m=80 Tỷ lệ mẫu quả được đánh dấu là:

𝐹𝑛= m/n =80/400=0,2.

Số cam tối đa có trong giỏ tương ứng với giá trị tối thiểu của tỷ lệ quả được đánh dấu. Do đó trước hết ta ước lượng khoảng bên trái cho tỷ lệ p các quả được đánh dấu với độ tin cậy 𝛾 = 1 − 𝛼 = 96% = 0,96 (𝛼 = 0,04)

Ta có công thức ước lượng khoảng bên phải:

𝐹𝑛 (1 − 𝐹𝑛)

(𝐹𝑛 − 𝑧2𝛼√

; +∞)

𝑛

Trong đó: 𝜑(𝑧

= 1−2𝛼 = 𝛾 = 0,96 = 0,46

2𝛼

2 2 2

Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được 𝑧2𝛼 = 1,75. Suy ra giá trị tối thiểu của tỷ lệ cam được đánh dấu là:

(𝐹 − 𝑧 √𝐹𝑛(1−𝐹𝑛) ; +∞) = 0,2-1,75√0,2(1−0,2) = 0,165

𝑛 2𝛼 𝑛

400

Như vậy với độ tin cậy 96%, ta có:

2000

≫ 0,165 ↔ 𝑁 ≤ 12121,2

𝑁

Vậy với độ tin cậy 96%, số cam tối đa trong giỏ là 12121.

**Ví dụ 4** ( Bùi Vũ Huyền Linh) : Để biết số lượng quýt trong giỏ người ta bỏ ra 2000 quả đánh dấu rồi bỏ chúng vào giỏ. Sau đó người ta nhặt lên 400 quả và thấy có 80 quả được đánh dấu. Ước lượng số quýt tối thiểu với độ tin cậy 94%.

#### Giải

Gọi N là số quýt có trong giỏ. Khi đó tỷ lệ quýt được đánh dấu có trong giỏ là p=2000/N.

Với mẫu thu được, ta có:

Cơ mẫu n=400

Số quả quýt đánh dấu được trong mẫu là: m=80 Tỷ lệ mẫu quả được đánh dấu là:

𝐹𝑛= m/n =80/400=0,2.

Số quýt tối thiểu có trong giỏ tương ứng với giá trị tối đa của tỷ lệ quả được đánh dấu. Do đó trước hết ta ước lượng khoảng bên trái cho tỷ lệ p các quả được đánh dấu với độ tin cậy 𝛾 = 1 − 𝛼 = 94% = 0,94 (𝛼 = 0,06)

Ta có công thức ước lượng khoảng bên phải:

𝐹𝑛(1 − 𝐹𝑛)

Trong đó: 𝜑(𝑧

(−∞; 𝐹𝑛 − 𝑧2𝛼√ 𝑛 )

= 1−2𝛼 = 𝛾 = 0,88 = 0,44

2𝛼

2 2 2

Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được 𝑧2𝛼 = 1,56. Suy ra giá trị tối đa của tỷ lệ cam được đánh dấu là:

(𝐹 + 𝑧 √𝐹𝑛(1−𝐹𝑛) ; +∞) = 0,2+1,56√0,2(1−0,2) = 0,2312

𝑛 2𝛼 𝑛

400

Như vậy với độ tin cậy 94%, ta có:

2000

≤ 0,2312 ↔ 𝑁 ≥ 8650,5

𝑁

Vậy với độ tin cậy 94%, số quýt tối thiểu trong giỏ là 8651.

**Ví dụ 5** ( Bùi Vũ Huyền Linh) : Trước kỳ bầu cử tổng thống người ta phỏng vấn ngẫu nhiên 1800 cử tri thì thấy có 1180 người ủng hộ cử tri A. Với độ tin cậy 99%, hỏi ứng cử viên A có thể thu được tối thiểu bao nhiêu phần trăm số phiếu bầu?

#### Giải

Với mẫu thu được, ta có: Cơ mẫu n=1800

Tỷ lệ mẫu số người ủng hộ là:

𝑚 1180

𝐹𝑛 =

= = 0,6556

𝑛 1800

Với độ tin cậy 99%, để ứng cử viên A có thể thu được tối thiểu bao nhiêu % số phiếu bầu ta cần ước lượng khoảng bên phải cho tỷ lệ p những người ủng hộ với độ tin cậy

𝛾 = 1 − 𝛼 = 99% = 0,99(𝛼 = 0,01)

𝐹𝑛 (1 − 𝐹𝑛)

Trong đó: 𝜑(𝑧

(𝐹𝑛 − 𝑧2𝛼√

= 1−2𝛼 = 𝛾 = 0,98 = 0,49

; +∞)

𝑛

2𝛼

2 2 2

Tra bảng giá trị hàm Laplace ta được 𝑧2𝛼 = 2,33. Suy ra giá trị tối thiểu của tỷ lệ người ủng hộ là:

𝐹 − 𝑧

√𝐹𝑛(1−𝐹𝑛) =0,6556 – 2,33√0,6556(1−0,6556) = 0,6295

𝑛 2𝛼 𝑛

1800

Như vậy, với độ tin cậy 99%, ứng cử viên A có thể thu được tối thiểu là 62,95% số phiếu bầu.

#### MỘT SỐ CHỈ TIÊU CỦA BÀI TOÁN ƯỚC LƯỢNG

* + - 1. **Tìm độ chính xác** 𝗌 **khi biết cỡ mẫu *n* và độ tin cậy** 𝜸

**Ví dụ 1** (Trương Thị Bích): Tìm khoảng ước lượng tổng thể u với độ tin cậy 98%.xét một mẫu có kích thước n = 100 ,trung bình mẫu x (trung bình) = 8m .độ lệch mẫu hiệu chỉnh s = 0,5m

#### Giải:

n = 100 => 𝜑(tα) = 0,49  tα = 2,33

ε = tα. 𝑠

√𝑛

= 2,33. 0,5𝑚 = 0,1165m

√100

Vậy khoảng ước lượng µ là (7,8835m;8,1165m)

**Ví dụ 2** (Trương Thị Bích): Tìm khoảng ước lượng tổng thể u với độ tin cậy 98%.xét một mẫu có kích thước n = 25 ,trung bình mẫu x (trung bình) = 8m .độ lệch mẫu hiệu chỉnh s=0,5m

#### Giải:

n = 25 < 30, α = 1- 0,98 = 0,02 => tα = t0,02(n – 1) = t0,02(24)  tα = 2,492 (α = 0,02; k

= 24)

ε = tα. 𝑠

√𝑛

= 2,492. 0,5𝑚 = 0,2492m

√100

Vậy khoảng ước lượng của µ là (7,7508m;8,2492m)

**Ví dụ 3** (Trương Thị Bích): Trước ngày bầu cử chủ tịch nước ,người ta phỏng vấn ngẫu nhiên 1800 cử tri thì thấy 1180 người ủng hộ ứng cử viên A .với độ tin cậy 95% hỏi ứng cử viên đó thu được tối thiểu bao nhiêu phần trăm phiếu bầu.

#### Giải:

+ Tỷ lệ mẫu là: f = 𝑘 = 1180 = 0,6556

𝑛 1800

+ Tra bảng hàm Laplace ta thấy:

𝜑(Zα) =

2

1− 𝛼

2

= 0,95

2

= 0,475 = 𝜑(1,96)

* Zα = 1,96

2

+ Độ chính xác của ước lượng là:

ε = Zα. √

2

𝑓(1−𝑓)

𝑛

= 1,96. √

0,6556(1−0,6556)

1800

= 0,0220

Do đó tỷ lệ tổng thể ủng hộ ứng cử viên A là: p = 0,6556 + 0,022

Hay khoảng ước lượng cần tìm là: (0,6556;0,6776)

Vậy tối thiểu ứng cử viên A sẽ thu được 63,36% số phiếu bầu

**Ví dụ 4** (Trương Thị Bích): Kiểm tra 800 vòng bi có 80 vòng quay sai quy cách(phế phẩm).nếu độ tin cậy là 90% thì độ chính xax ước lượng là bao nhiêu?

#### Giải:

Ta có: Ur = ϕ-1 (𝛾 + 0,5) = u(𝛼) = u(0,1) = 1,65 và f = 80

= 0,2

2 2 2 400

Do đó độ chính xác ε = 1,65. √ 0,2.0,8 ≈ 0,033 = 3,3%

400

**Ví dụ 5** (Trương Thị Bích): Khối lượng sản phẩm là biến nn có phân bố chuẩn với độ lệch chẩn =1. thử 25 sp ta thu được kết quả sau:

|  |  |
| --- | --- |
| *Khối lượng* | *Số sản phẩm* |
| *18* | *3* |

|  |  |
| --- | --- |
| *19* | *5* |
| *20* | *15* |
| *21* | *2* |

Hãy ước lượng khối lượng trung bình của sản phẩm bằng khoảng tin cậy với độ tin cậy bằng 95%

Giải:

Ta lập bảng:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *xi* | *ri* | *rixi* |
| *18* | *3* | *54* |
| *19* | *5* | *95* |
| *20* | *15* | *300* |
| *21* | *2* | *42* |
| 𝛴 | *25* | *491* |

Ta có: x ̅ = 491 = 19,64

25

Độ tin cậy 1 – α = 0,95 => α = 0, khi đó α= 0,025.

2

Tra bảng ta được: uα = 1,96

2

Độ chính xác của ước lượng:

ε = uα.

2

𝜎

√𝑛

= 1,96. 1 =

√25

1,96

5

= 0,392

khoảng tin cậy cho khối lượng trung bình của sản phẩm:

(x ̅ – ε, x ̅ + ε) = (19,64 – 0,392; 19,64 + 0,392) = (19,248; 20,032)

#### Tìm độ tin cậy 𝜸 = 1−𝑎 khi biết chính xác 𝗌 và cỡ mẫu

**Ví dụ 1(**Trịnh Quang Nam**):** Quan sát ở một mẫu, người ta có kết quả về chiều cao X(m) của loại cây công nghiệp ở một nông trường như sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 𝑋𝑖 *(m)* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* |
| *Số cây (*𝑛𝑖) | *2* | *8* | *23* | *32* | *23* |

* 1. Hãy ước lượng chiều cao trung bình của loài cây đó với độ tin cậy 90%.
  2. Để ước lượng chiều cao trung bình của loại cây đó ở độ tin cậy 95%, với sai số không quá 2 dm thì cần phải quan sát thêm bao nhiêu cây nữa?

#### Giải

1. Các giá trị đặc trưng của mẫu là:

Kỳ vọng mẫu: ̅

1 ∑5

n X = 5,75

X = .

n

i=1 i i

Phương sai mẫu: 2 1 ∑5 n X 2 − ̅X2 = 1.028

S = .

n i=1 i i

Phương sai mẫu hiệu chỉnh: S′2 = n

n−1

. S2=1,04

* + S’=1,02

Theo bài ra γ = 0,9 => Uγ

= Φ−1

γ

( + 0,5) = Φ

2

−1 (0,9 + 0,5) = 1,95

2

Khoảng tin cậy 90% cho chiều cao trung bình của loại cây đó là:

S′

a ∈ (̅X − Uγ.

√n

S′

; ̅X + Uγ. )

√n

Thay số vào biểu thức trên ta được

a ∈ (5,534; 5,966)

1. Giả sử n1 là số cây cần quan sát với độ tin cây 95% và sai số không quá 0,2m ta có

U = Φ−1 (0,95 + 0,5) = 1,96

γ 2

Theo bài ra: U .

σ

γ

√n

≤ 0,2 ⟺ 1,96. 1,04

√n1

≤ 0,2 ⟺ n1

≥ 103,87 ⟺ n1

≥ 104

Vậy cần quan sát ít nhất 104 cây nữa.

**Ví dụ 2(**Trịnh Quang Nam )Nghiên cứu về độ bền X (kg/mm2) của một loại thép, người tiến hành một số quan sát một số tấm thép trên mẫu và có kết quả cho trong bảng sau:

|  |  |
| --- | --- |
| *Độ bền*  *(kg/mm)* | *Số tấm thép* |
| *115* | *15* |
| *125* | *10* |
| *135* | *15* |
| *145* | *5* |

1. Tìm khoảng tin cậy 97% cho độ bền trung bình của loại thép trên.
2. Thép có độ từ 135kg/mm2 trở lên được gọi là thép loại A. Tìm khoảng tin cậy 98% cho tỷ lệ thép loại A.

#### Giải

1. Gọi a là độ bền trung bình của loại thép trên với độ tin cậy 97%, vì n=45>30 nên

a ∈ (̅X − Uγ.

S′ S′

; ̅X + Uγ. )

√n √n

Các giá trị đặc trưng của mẫu là:

Kỳ vọng mẫu: ̅

1 ∑4

n X =127,22

X = .

n

i=1 i i

Phương sai mẫu: 2 1 ∑4 n X 2 − ̅X2 = 106,17

S = .

n i=1 i i

Phương sai mẫu hiệu chỉnh: S′2 = n

n−1

. S2=108,59

* + S’=10,42

Theo bài ra γ = 0,97 => Uγ

= Φ−1 γ

2

(

+ 0,5) = Φ−1

( + 0,5) =2,17

0,97

2

Vậy khoảng tin cậy 97% cho độ bền trung bình của loại thép trên là:

a ∈ (127,22 − 2,17. 10,42 ; 127,22 + 2,17. 10 ,42

)

√45

hay a ∈ (123,85; 130,59)

√45

1. Gọi f là tỷ lệ thép loại A trên mẫu. Ta có: f = 15+5 = 4

45 9

Gọi p là tỷ lệ thép loại A của loại thép đó với độ tin cậy 98%

U = ϕ−1 (0,98 + 0,5) = 2,33

γ 2

Khoảng tin cậy cần tìm là:

p ∈ (f − Uγ

. √f(1−f) ; f + U

n

γ

. √f(1−f)

n

)

Thay số vào công thức trên ta được:

p ∈ (0,273; 0,6178)

**Ví dụ 3**(Trịnh Quang Nam) Tiến hành phỏng vấn 500 hộ gia đình ở một thành phố có 220 hộ sử dụng sản phẩm B.

1. Với độ tin cậy 95%, tìm số hộ gia đình sử dụng sản phẩm B biết thành phố có 15000 hộ.
2. Nếu muốn ước lượng ở câu a) đạt độ chính xác 4% thì độ tin cậy là bao nhiêu?

#### Giải

1. Tỷ lệ hộ gia đình sử dụng sản phẩm B trên mẫu là: f = 220 = 0,44

500

Theo bài ra độ tin cậy là 95%

* U = ϕ−1

γ

0,95

( + 0,5) = 1.96

2

Gọi p là tỷ lệ hộ gia đình sử dụng sản phẩm B của thành phố. Vì n=400>30 nên:

p ∈ (f − Uγ

. √f(1 − f) ; f + U

n γ

. √f(1 − f)) n

Thay số vào biểu thức trên ta được:

p ∈ (0,397; 0,484)

Vậy số hộ gia đình sử dụng sản phẩm B của thành phố nằm trong khoảng (0,397.15000; 0,484.15000) hay ( 5955; 0,7260)

1. Ước lượng đạt độ chính xác 4%

* + ε = 0,04 mà ε = Uγ

. √f(1−f) ⇔ 0,04 = ϕ−1

n

γ

( + 0,5)

2

√0,44(1−0,44)

500

- γ = 0,928

Vậy độ tin cậy cần tìm là 92,8%

**Ví dụ 4 (**Trịnh Quang Nam): Để đánh giá trữ lượng cá trong một hồ lớn, người ta đánh bắt 2000 con cá từ hồ đó, đánh dấu rồi thả lại xuống hồ. Vài ngày sau, họ đánh bắt lại 400 con thì thấy có 80 con có đánh dấu.

1. Hãy ước lượng trữ lượng cá trong hồ bằng khoảng tin cậy 95%.
2. Nếu muốn sai số của ước lượng giảm đi một nửa thì lần sau phải đánh bắt bao nhiêu con cá?

#### Giải

* 1. Gọi p là tỷ lệ cá được đánh dấu trong hồ

Khi đó, p = 2000 với N là trữ lượng cá trong hồ.

N

Khoảng tin cậy 95% cho tỉ lệ cá được đánh dấu trong hồ là (f − ε; f + ε)

Với f = 80

= 0,2; U

= ϕ−1

0,95 + 0,5) = 1.96

400

γ ( 2

và ε = U

. √f(1−f) =1,96. √0,2(1−0,2) = 0,0392

γ n 400

Vậy khoảng tin cậy cho p là (0,1608; 0,2392) do đó lượng cá trong hồ khoảng từ 8362 đến 12438 con.

b) Sai số của ước lượng giảm còn đi một nửa thì ε = 0,0392 = 0,0196

2

Gọi t là số cá cần đánh bắt để sai số của ước lượng giảm đi một nửa. ta có:

ε = Uγ

. √f(1 − f)

t

- 0,0196 = 1,96. √0,2(1 − 0,2)

t

- t = 1600

Vậy cần đánh bắt 1600 con cá để sai số của ước lượng giảm đi một nửa.

**Ví dụ 5**(Trịnh Quang Nam): Một máy sản xuất tự ñộng có tỉ lệ sản xuất ra sản phẩm loại A lúc đầu là 48%. Máy được cải tiến và sau một thời gian áp dụng, người ta kiểm tra 40 hộp, mỗi hộp gồm 10 sản phẩm và ghi lại số sản phẩm loại A trong mỗi hộp (SSPLA/h) như sau :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *SSPLA/ hộp* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* |
| *Số hộp* | *2* | *0* | *4* | *6* | *8* | *10* | *4* | *5* | *1* | *0* |

Hãy ước lượng tỷ lệ sản phẩm loại A sau khi máy được cải tiến bằng khoảng tin cậy 95%.

#### Giải

Tổng số sản phẩm loại A trong 40 hộp là 215. Tỷ lệ sản phẩm loại A trên mẫu khảo sát:

215 43

f = =

400 80

Khoảng tin cậy 95% cho tỉ lệ sản phẩm loại A: (f − ε; f + ε)

0,95

f(1−f)

43 43

(1− )

Với U = ϕ−1 (

γ

2

+ 0,5) = 1.96 ; ε = U . √

n

γ

= 1,96. √80 80 = 0,0489

400

* Khoảng tin cậy 95% cho tỷ lệ sản phẩm loại A là (0,4886; 0,5864)

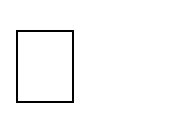
#### Tìm cỡ mẫu tối thiểu *n* khi biết độ tin cậy 𝜸 = 1−𝑎 và độ chính xác 𝗌

**Ví dụ 1**(Trịnh Quang Nam): Khảo sát giá của một loại hàng thiết yếu trên thị trường tự do tại 20cửa hàng thấy giá trung bình là 135,8 nghìn, với độ dao động đo bởi phương sai là23,2 nghìn2. Giả thiết giá loại hàng này là biến phân phối Chuẩn.Với độ tin cậy 95%, ước lượng khoảng giá trung bình thị trường.

#### Giải

Đặt X là giá của hàng hóa này trên thị trường, đơn vị là nghìn, thì theo giả thiết

X

phân phối Chuẩn: X ~ N(μ, 2).

Mẫu có kích thước: n=20; *X* =135,8; S2=23,3 => S=4,827

Độ tin cậy 95% tức là: γ=0,95, ước lượng giá trị trung bình của thị trường là: ∈

Công thức:

Ta có:

U = ∅−1(0,95+0,5) = 1,96

2

γ

E(X) ∈ ( *X* - Uγ

. S"

√n

; *X* + Uγ

. S")

√n

* E(X) ∈ (133,541; 138,059)

Vậy với độ tin cậy 95%, ước lượng khoảng, hay khoảng tin cậy cho giá trung bình của thị trường là (133,541 ; 138,059) nghìn đồng.

**Ví dụ 2**(Trịnh Quang Nam): Có số liệu về chi tiêu của 100 khách hàng cho trong bảng số liệu sau (đơn vị: nghìn đồng). Giả thiết chi tiêu là biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn, với độ tin cậy 95%.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Chi tiêu* | *60-*  *100* | *100-*  *140* | *140-*  *180* | *180-*  *220* | *220-*  *260* | *260-*  *300* | *300-*  *340* |
| *Số người* | *3* | *9* | *25* | *29* | *21* | *7* | *6* |

Ước lượng điểm và khoảng cho chi tiêu trung bình tất cả các khách hàng

#### Giải

Đặt chi tiêu là *X*, theo giả thiết *X* phân phối Chuẩn: *X* ~ *N*(*μ*, làchưa biết.

với các tham số



2)

Từ số liệu của đề bài, thực hiện tính toán như trong bài giảng số 5, ta được các thôngtin từ mẫu cụ thể này:

*n* = 100, *X* = 200,4 (nghìn đồng), *s*2 = 3086,71 (nghìn đồng), *s* = 55,558 (nghìn

đồng)

Độ tin cậy 95% nghĩa là *α* = 0,05.

Ước lượng điểm cho chi tiêu trung bình tất cả các khách hàng chính là trung bình mẫu, và bằng 200,4 nghìn đồng.

Vậy với độ tin cậy 95%, ước lượng khoảng cho chi tiêu trung bình tất cả các khách hàng là trong khoảng (189,51; 211,29) nghìn đồng.

**Ví dụ 3**(Trịnh Quang Nam): Kiểm tra ngẫu nhiên 400 sản phẩm của một nhà máy sản xuất, thấy có 92sản phẩm đạt chất lượng loại I. Với độ tin cậy 95%: Tỉ lệ sản phẩm loại I của nhà máy nằm trong khoảng nào?

#### Giải

Đặt *p* là tỉ lệ sản phẩm loại I của nhà máy, *p* là chưa biết.

Với mẫu, *n* = 400; số sản phẩm loại I, *k* = 92, đặt *f* là tỉ lệ sản phẩm loại I trong mẫu

*f*= 𝑘 = = 92

= 0,23

Ta có: : 𝛾=0,95

𝑛 400

𝑈𝛾

= ∅−1(0,95+0,5) = 1,96

2

Áp dụng CT:

*f*- √𝑓(1−𝑓). 𝑈

< p < *f*+ √𝑓(1−𝑓). 𝑈

√𝑛 𝛾 √𝑛 𝛾

 *0,23* - √0,23(1−0,23). 1,96 < p < *0,23* + √0,23(1−0,23). 1,96

* + 0,1888 < *p* < 0,2712

√400

√400

**Ví dụ 4**(Trịnh Quang Nam): Để ước lượng tỉ lệ sản phẩm xấu của một kho đồ hộp, người ta kiểm tra ngẫu nhiên 100 hộp thấy có 11 hộp xấu. Ước lượng tỉ lệ sản phẩm xấu của kho đồ hộp với độ tin cậy 94%

#### Giải

Ta có: n=100; f= 11

100

=0.11

Áp dụng CT ước lượng tỉ lệ:

𝛾 =0,94 => 𝑡𝑎 = 1,8808

𝑝1= 0,11-1.8808. √0,11(1−0,11) = 0,051

√100

𝑝2= 0,11+1.8808. √0,11(1−0,11) = 0,169

√100

Với độ tin cậy 94%, tỉ lệ sản phẩm xấu của kho đồ hộp vào khoảng (0,051; 0,169)

**Ví dụ 5**(Trịnh Quang Nam): Trọng lượng các bao bột mì tại một cửa hàng lương thực là 1 ĐLNN có phân phối chuẩn. Kiểm tra 20 bao, thấy trọng lượng trung bình của mỗi bao bột mì là: 48 kg, phương sai mẫu điều chỉnh là S2 = 0,5 kg. Hãy tìm ước lượng trung bình trọng lượng của một bao bột mì thuộc cửa hàng, với độ tin cậy là 95%.

**Giải**

Áp dụng TH: n<30, 𝜎2 chưa biết: n=20, *X* =48, 𝛾=0,95, S=0,5

𝛾=0,95 => 𝑡𝑎 = 2,093

𝑎1= 48-2.093. 0,5

√20

= 47,766

𝑎2= 48+2.093. 0,5

√20

= 48,234

Vậy với độ tin cậy là 95%, trọng lượng trung bình của một bao bột mì thuộc cửa hàng (47,766; 48,234)

# CHƯƠNG 5: KIỂM ĐỊNH GIẢ THIẾT THỐNG KÊ

#### KIỂM ĐỊNH GIẢ THIẾT CHO GIÁ TRỊ KỲ VỌNG

**Ví dụ 1** (Hà Bích Ngọc): Năng suất lúa trung bình của những vụ trước là 55 tấn/ha. Vụ lúa năm nay người ta áp dụng 1 phương pháp kỹ thuật mới cho toàn bộ diện tích trồng lúa trong vùng. Điều tra năng suất 100ha lúa, ta có bảng số liệu sau:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Năng*  *suất(tạ/ha)* | *40-45* | *45-50* | *50-55* | *55-60* | *60-65* | *65-70* | *70-75* | *75-80* |
| *Diện*  *tích(ha)* | *7* | *12* | *18* | *27* | *20* | *8* | *5* | *3* |

Với mức ý nghĩa là 1% hãy kết luận xem phương pháp kỹ thuật mới có làm tăng năng suất của lúa trung bình của vùng này hay không

#### Giải

Ta có bảng sau:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Xi* | *ni* | *niXi* | *niXi2* |
| *42,5* | *7* | *297,5* | *12643,75* |
| *47,5* | *12* | *570* | *27075* |
| *52,5* | *18* | *945* | *49612,5* |
| *57,5* | *27* | *1552,5* | *89268,75* |
| *62,5* | *20* | *1250* | *78125* |
| *67,5* | *8* | *540* | *36450* |
| *72,5* | *5* | *362,5* | *26281,25* |
| *77,5* | *3* | *232,5* | *18018,75* |
|  | *n =100* | *5750* | *337475* |

Trung bình mẫu: 𝑋̅ = 1

𝑛

 niXi = 5750/100 = 57,5 (tạ)

Phương sai mẫu của X: S2 = 1

𝑛

niXi2 - 𝑋̅2 = 337475 - 57,52 = 68,5(tạ)

100



S = √S2 = 8,276472679

Giả thiết H0: a = a0= 55; H1: a1 ≠ 55 Vì n>30; σ2 chưa biết nên ta có:

K = 𝑋̅−𝑎0 √𝑛 − 1= 57,5−55 √99= 3,0078

𝑆

Ta có α = 0,01

8,27

𝑡(𝑛−1;𝛼) = 𝑡(99;0,01)= 2,33

Ta thấy |K| = 3,0078 < 2,33 => bác bỏ H0, chấp nhận H1

Vậy với mức ý nghĩa là 1% phương pháp kỹ thuật mới có làm tăng năng suất của lúa trung bình của vùng này

**Ví dụ 2** (Hà Bích Ngọc): Giám đốc 1 xí nghiệp cho biết lương trung bình của một công nhân thuộc xí nghiệp là 380 nghìn đồng / tháng. Chọn ngẫu nhiên 36 công nhân thấy lương trung bình là 350 nghìn đồng / tháng, với độ lệch chuẩn σ = 40 nghìn. Lời báo cáo của giám đốc có tin cậy được không, với mức ý nghĩa là 5%

#### Giải

Giả thiết H0 : a = 380 ; H1: a ≠ 380

A là tiền lương trung bình thật sự của công nhân

a0 = 380 là tiền lương trung bình của công nhân theo lời giám đốc

𝑋̅ = 350 ; σ = 40 ; α = 5% = 0,05, n = 36

Do α = 5% => γ = 1 - α = 0,95 =>𝑈𝛾

=  -1 (𝛾 + 0,5) =  -1(0,975) = 1,96

2

Ta có: K = 𝑋̅− 𝛼0 √𝑛 = 350− 380 √36 = -4,5

𝜎 40

|K| = 4,5 > 1,96 => bác bỏ H0, chấp nhận H1

Vậy với mức ý nghĩa là 5% không tin vào lời giám đốc. Lương trung bình thật sự của công nhân nhỏ hơn 380 nghìn đồng/tháng

**Ví dụ 3** (Hà Bích Ngọc): Một cửa hàng thực phẩm nhận thấy thời gian vừa qua trung bình 1 khách hàng mua 25 nghìn đồng thực phẩm trong ngày. Nay cửa hàng chọn ngẫu nhiên 15 khách hàng thấy trung bình 1 khách hàng mua 24 nghìn đồng trong ngày và phương sai mẫu điều chỉnh là S2 = 4. Với mức ý nghĩa là 5%, thử xem có phải sức mua của khách hàng hiện nay có thực sự giảm sút

#### Giải

Giả thiết H0: a = a0 = 25; H1: a ≠a0 ≠ 25 a là sức mua của khách hàng hiện nay

a0 = 25 là sức mua của khách hàng trước đây

𝑋̅ = 24, n = 15; S = √𝑆2 = 2; α = 5%

Do α = 5% => γ = 1 - α = 0,95 =>𝑈𝛾

=  -1 (𝛾 + 0,5) =  -1(0,975) = 1,96 = t(n-1;α)

2

Ta có: K = 𝑋̅− 𝛼0 √𝑛 − 1 = 24− 25 √14 ≈ -1,87

𝑆 2

|K| = 1,87 < 1,96 => chấp nhận giả thiết H0

Vậy mức ý nghĩa 5% sức mua của khách hàng hiện nay không giảm sút

**Ví dụ 4** (Hà Bích Ngọc): Theo một nguồn tin thì tỉ lệ hộ dân thích xem dân ca trên tivi là 80%. Thăm dò 36 hộ dân thấy có 25 hộ dân thích xem dân ca. Với mức ý nghĩa là 5% , kiểm định lại xem nguồn tin này có đáng tin cậy hay không

#### Giải

Gải thiết H0: a = a0 = 0,8; H1: a ≠a0 ≠ 0,8 a là tỉ lệ hộ dân thực sự thích xem dân ca

a0 = 0,8 là tỉ lệ hộ dân thích xem dân ca theo nguồn tin n = 36; f = 25/36= 0,69; α = 5%

Do α = 5% => γ = 1 - α = 0,95 =>𝑈𝛾

Ta có: K = 𝑓− 𝛼0 √𝑛 = 0,69− 0,8

=  -1 (𝛾 + 0,5) =  -1(0,975) = 1,96 = t(n-1;α)

2

√36 = -1,65

√𝑓(1−𝑓) √0,69(1−0,69)

|K| = 1,65 <1,96 => chấp nhận giả thiết H0

Vậy với mức ý nghĩa là 5% thì nguồn tin này là đáng tin cậy

**Ví dụ 5** (Hà Bích Ngọc): Trọng lượng 1 sản phẩm có phân phối chuẩn với trọng lượng trung bình là 500 gam. Sau 1 thời gian sản xuất, người ta nghi ngờ trọng lượng trung bình của loại sản phẩm này có xu hướng giảm nên tiến hành kiểm tra 25 sản phẩm và thu được kết quả sau:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Trọng lương*  *(g)* | *480* | *485* | *490* | *495* | *500* | *510* |
| *Số sản phẩm* | *2* | *3* | *8* | *5* | *3* | *4* |

Với mức ý nghĩa 5%, hãy kết luận điều nghi ngờ trên có đúng hay không

#### Giải

Ta có bảng sau:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Xi* | *ni* | *niXi* | *ni*𝑋𝑖 *2* |
| *480* | *2* | *960* | *460800* |
| *485* | *3* | *1455* | *705675* |
| *490* | *8* | *3920* | *1920800* |
| *495* | *5* | *2475* | *1225125* |
| *500* | *3* | *1500* | *750000* |
| *510* | *4* | *2040* | *1040400* |
|  | *n = 25* | *12350* | *6102800* |

Trung bình mẫu: 𝑋̅ = 1

𝑛

 niXi = 12350/25 = 494 (g)

Phương sai mẫu của X: S2 = 1

𝑛

niXi2 - 𝑋̅2 = 6102800 - 4942 = 76(g)

25



S = √S2 = 8,71779

Giả thiết H0: a = a0 = 500; H1: a1 ≠a0 ≠ 500 Vì n<30 , σ2 chưa biết nên ta có:

K = 𝑋̅−𝑎0 √𝑛 − 1= 494−500 √24 = -3,3717

𝑆

Ta có α = 0,03

8,71779

𝑡(𝑛−1;𝛼) = 𝑡(24;0,03)= 1,974

Ta thấy |K|= 3,3717>1,974 => bác bỏ giả thiêt H0, chấp nhận đối thiết H1 Với mức ý nghĩa 5%, hãy kết luận điều nghi ngờ trên có đúng

Vậy với mức ý nghĩa 5%, hãy kết luận điều nghi ngờ trên là đúng

**Ví dụ 6** (Hà Bích Ngọc): Điều tra Cholesterol toàn phần trong huyết thanh của 25 bệnh nhân bị một loại bệnh B, ta có trung bình cộng của lượng Cholesterol là 172 mg% và độ lệch chuẩn bằng 40 mg%. theo tai liệu về hằng số sinh hóa bình thường của người Việt Nam thì lượng Cholesterol trung bình toàn phần trong huyết thanh là 156 mg% và tuần theo luật phân phối chuẩn. Hỏi lượng Cholesterol của các bệnh nhân mắc bệnh B có cao hơn bình thường không ? (kết luận ở mức α = 5%)

#### Giải

* Kiểm định giả thiết:

*H0* : a = 156 (mg%); *H1* : a > 156(mg), ở mức α = 5%

* Nếu *H0*

đúng thì ĐLNN: K = 𝑋̅−156 √25 ~ t (24)

𝑠

Với mức α = 5% ta có: *gtth* = 𝑡(𝑛−1;2𝛼) = 𝑡(24;0,1) = 1,71

Với mẫu cụ thể ta có: K = 172−156 √25 = 2 > *gtth*

40

* Vậy *H0* bị bác bỏ nghĩa là lượng Cholesterol của bệnh nhân mắc bệnh B cao hơn bình thường

**Ví dụ 7** (Hà Bích Ngọc): Khối lượng của một loại sản phẩm do một nhà máy sản xuất là một biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn N(500; (8,5)2). Sau một thời gian sản xuất, ban lãnh đọa nhà máy nghi nghờ rằng khối lượng của loại sản phẩm này có xu hướng giảm, nên tiến hành cân thử 25 sản phẩm và thu được kết quả sau:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Khối lượng (g)* | *480* | *485* | *490* | *495* | *500* | *510* |
| *Số sản phẩm* | *2* | *3* | *8* | *5* | *3* | *4* |

Với mức ý nghĩa α = 5%, hãy cho biết kết luận về điều nghi ngờ trên

#### Giải

* Ta lập bảng:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *ni* | *nixi* | *nixi2* |
| *480* | *2* | *960* | *460800* |
| *485* | *3* | *1455* | *705675* |
| *490* | *8* | *3920* | *1920800* |
| *495* | *5* | *2475* | *1225125* |
| *500* | *3* | *1500* | *750000* |
| *510* | *4* | *2040* | *1040400* |
| 𝛴 | *25* | *12350* | *6102800* |

* Kỳ vọng mẫu:

𝑥̅ = 1 ∑𝑘

𝑛 𝑥 = 1 ∑6

𝑛 𝑥

𝑛 𝑖=1

𝑖 𝑖

120

𝑖=1

𝑖 𝑖

= 1 . 12350 = 494

25

* Phương sai mẫu:

S2 = 1 ∑𝑘

𝑛 𝑥 2 – (𝑥̅)2 = 1 ∑6

𝑛 𝑥 2 – 4942

𝑛 𝑖=1

𝑖 𝑖

25 𝑖=1

𝑖 𝑖

= 1 . 6102800 – 4942 = 76

25

* Độ lệch chuẩn: s = √𝑠2 = √76 = 8,718
* Kiểm định giả thiết:

*H0* : a = a0 = 500; *H1* : a < a0 ở mức α = 5%

- Nếu *H0*

đúng thì ĐLNN: K = 𝑋̅−𝑎0 √25 ~ N(0,1) với n = 25; 𝜎 = 8,5; a

𝜎

0

= 500

Với mức α = 5% ta có: *gtth =* -u1-2α =- 𝜙−1(1 − 𝛼) =- 𝜙−1(0,95) = -1,65

Với mẫu cụ thể ta có: K = 494−500 √25 = -3,53 < *gtth*

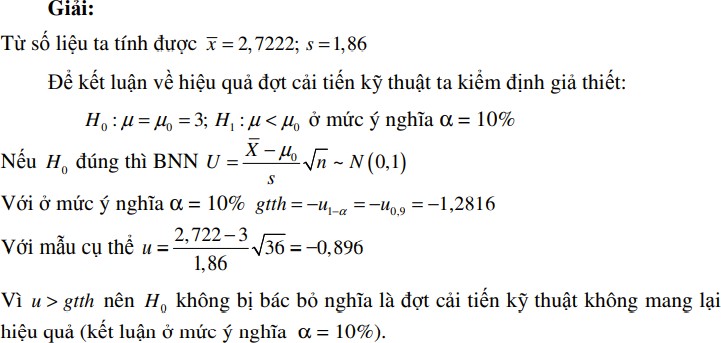
8,5

Vậy *H0* bị bác bỏ nghĩa là điều nghi ngờ trên là đúng.

**Ví dụ 8** (Hà Bích Ngọc): Sản phẩm của một xí nghiệp đúc cho phép số khuyết tật trung bình cho một sản phẩm là 3. Sau một đợt cải tiến kỹ thuật, người ta lấy ngẫu nhiên 36 sản phẩm để kiểm tra số khuyết tật trên mỗi sản phẩm (SKTTMSP). Kết quả thu được như sau:

|  |  |
| --- | --- |
| *SKTTMSP* | *0 1 2 3 4 5 6* |
| *Số sản phẩm* | *7 4 4 6 8 6 1* |

Hãy cho kết luận về hiệu quả của đợt cải tiến kỹ thuật đối với số khuyết tật trung bình của một sản phẩm ở mức ý nghĩa α = 10%.



**Ví dụ 9** (Hà Bích Ngọc): Trong một cuộc điều tra về nhịp mạch của 64 thanh niên làm nghề A, kết quả là nhịp mạch trung bình 74 lần/phút và độ lệch chuẩn bằng 9 lần/phút. Hãy kiểm định xem đặc điểm nghề A có làm cho nhịp mạch của thanh niên tăng quá

mức bình thường không, biết rằng nhịp mạch bình thường của thanh niên là 71 lần/phút. (kết luận với mức α=2% ).

#### Giải

Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ nhịp mạch của thanh niên làm nghề A. Ta cần kiểm định giả thiết:

H0: a = 71; H1: a > 71 ở mức 𝖺= 2%.

*X*  71 64

Nếu H0 đúng thì biến ngẫu nhiên *U*  ~N(0,2)

*s*

Với 𝖺= 2%, *gtth*  *u*1  *u*0,99  3,1751.

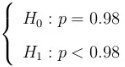
Với mẫu cụ thể ta có

*u*  74  71.8  16  2,778  *gtth*

9 9

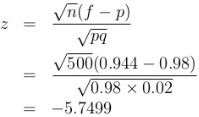
**Ví dụ 10** (Hà Bích Ngọc): Một máy sản xuất tự độn với ty lệ chính là 98%. Sau một thời gian hoạt động, người ta nghi ngờ tỷ lệ trên bị giảm . Kiểm tra ngẫu nhiên 500 sản phẩm thấy có 28 phế phẩm, với =0.05 hãy kiểm tra chất lượng làm việc của máy có còn hoạt động như trước hay không?

#### Giải

Ta cần kiểm định các giả thuyết

Ta có n=500, f= =0.944, nf=472>=5 và n(1-f)=28>=5

Do đó ta dùng



Ta thấy z< =-1.65. Do đó ta bác bỏ giả thuyết H0. Nghĩa là chất lượng máy không còn tốt như trước

#### KIỂM ĐỊNH GIẢ THIẾT CHO GIÁ TRỊ XÁC SUẤT

**Ví dụ 1** (Hà Bích Ngọc): Một công ty bào chế một loại thuốc chữa dị ứng tuyên bố rằng thuốc của họ có hiệu quả không dưới 90% trong việc làm giảm cơn dị ứng trong vòng 8 giờ.

Một mẫu gồm 200 người bị dị ứng sử dụng loại thuốc trên, có 160 người giảm cơn dị ứng. Hãy xác định xem lời tuyên bố công ty có giá trị không ? (ở mức ý nghĩa α = 0,07)

**Giải**

* Gọi p là tỷ lệ người giảm dị ứng khi dung thuốc của công ty trong vòng 8 giờ. Ta cần xác định xem p có bằng 90% trở lên hay không. Muốn vậy ta kiểm định giả thiết:

*H0* : 𝑓 = p0 = 90%; *H1* : 𝑓 < p0 ở mức α = 0,07

* Nếu *H0*

đúng thì ĐLNN: K = 𝑓−𝑝0 √𝑛 ~ N(0,1)

√𝑝0(1−𝑝0)

* Với mức α = 0,07 ta có: *gtth =* -u1-2α =- 𝜙 −1

1−2𝛼) =- 𝜙

−1(0,43) = -1,48

0 ( 2 0

160

−0,9

Với mẫu cụ thể ta có: K = 200 √200 = -4,714 < *gtth*

√0,9(1−0,9)

* Vậy ta bác bỏ giả thiết *H0* nghĩa là tuyên bố của công ty không có giá trị. Kết luận ở mức ý nghĩa 0,07

**Ví dụ 2** (Hà Bích Ngọc): Trước đây, nhà máy Alpha sản xuất ra một loại sản phẩm với tỉ lệ phế phẩm 5%. Năm nay, sau đợt cải tiến kỹ thuật, để kiểm tra hiệu quả, người ta lấy ra một mẫu gồm 800 sản phẩm để kiểm tra thì thấy có 24 phế phẩm

* + 1. Với mức ý nghĩa α = 5%, hãy kiểm tra xem đợt cải tiến kỹ thuật có thực sự làm giảm tỉ lệ phế phẩm không ?
    2. Sau đợt cải tiến kỹ thuật, nếu nhà máy báo cáo tỉ lệ phế phẩm là 2% thì có chấp nhận không ? (ở mức ý nghĩa α = 3%)

**Giải**

1. Gọi p là tỷ lệ phế phẩm sau đợt cải tiến kỹ thuật, tỷ lệ mẫu. ta cần kiểm định giả thiết sau:

*H0* : 𝑓 = p0 = 5%; *H1* : 𝑓 < p0 ở mức α = 5%

* Nếu *H0*

đúng thì ĐLNN: K = 𝑓−𝑝0 √𝑛 ~ N(0,1)

√𝑝0(1−𝑝0)

* Với mức α = 5% ta có: *gtth =* -u1-2α =- 𝜙0

−1 (1−2𝛼) =- 𝜙

2

0

−1(0,45) = -1,65

24 −0,05

Với mẫu cụ thể ta có: K = 800 √800 = -2,6 < *gtth*

√0,05(1−0,05)

* Vậy ta bác bỏ *H0* nghĩa là đợt cải tiến kĩ thuật thật sự làm giảm tỷ lệ phế phẩm

1. Ta kiểm định giả thiết:

*H0* : 𝑓 = p0 = 5%; đối thiết *H1* : 𝑓 ≠ p0 ở mức α = 3%

* Nếu *H0*

đúng thì ĐLNN: K = 𝑓−𝑝0 √𝑛 ~ N(0,1)

√𝑝0(1−𝑝0)

Với mức α = 3% ta có: *gtth =* u1-α = 𝜙0

−1 (1−𝛼) = 𝜙

2

0

−1(0,485) = 2,17

|𝑓−𝑝 |

24

| −0,02|

Với mẫu cụ thể ta có: |K| = 0 √𝑛= 800 √800 = 2,02 < *gtth*

√𝑝0(1−𝑝0)

√0,02(1−0,02)

* Vậy ta chấp nhận *H0* nghĩa là chấp nhận lời tuyên bố của công ty

**Ví dụ 3** (Hà Bích Ngọc): Một công ty bào chế một loại thuốc chữa dị ứng tuyên bố rằng thuốc của họ có hiệu quả không dưới 90% trong việc làm giảm cơn dị ứng trong vòng 8 giờ. Một mẫu gồm 200 người bị dị ứng sử dụng loại thuốc trên, có 160 người giảm cơn dị ứng. Hãy xác định xem lời tuyên bố công ty có giá trị không ? (ở mức ý nghĩa α = 0,07)

***Giải***

* Gọi p là tỷ lệ người giảm dị ứng khi dung thuốc của công ty trong vòng 8 giờ. Ta cần xác định xem p có bằng 90% trở lên hay không. Muốn vậy ta kiểm định giả thiết:

*H0* : 𝑓 = p0 = 90%; *H1* : 𝑓 < p0 ở mức α = 0,07

- Nếu *H0* đúng thì ĐLNN: K = 𝑓−𝑝0 √𝑛 ~ N(0,1)

√𝑝0(1−𝑝0)

* Với mức α = 0,07 ta có: *gtth =* -u1-2α =- 𝜙0

160

−1 (1−2𝛼) =- 𝜙

2

0

−1(0,43) = -1,48

−0,9

Với mẫu cụ thể ta có: K = 200 √200 = -4,714 < *gtth*

√0,9(1−0,9)

* Vậy ta bác bỏ giả thiết *H0* nghĩa là tuyên bố của công ty không có giá trị. Kết luận ở mức ý nghĩa 0,07

**Ví dụ 4** (Hà Bích Ngọc): Trước đây, nhà máy Alpha sản xuất ra một loại sản phẩm với tỉ lệ phế phẩm 5%. Năm nay, sau đợt cải tiến kỹ thuật, để kiểm tra hiệu quả, người ta lấy ra một mẫu gồm 800 sản phẩm để kiểm tra thì thấy có 24 phế phẩm

1. Với mức ý nghĩa α = 5%, hãy kiểm tra xem đợt cải tiến kỹ thuật có thực sự làm giảm tỉ lệ phế phẩm không ?
2. Sau đợt cải tiến kỹ thuật, nếu nhà máy báo cáo tỉ lệ phế phẩm là 2% thì có chấp nhận không ? (ở mức ý nghĩa α = 3%)

***Giải***

1. Gọi p là tỷ lệ phế phẩm sau đợt cải tiến kỹ thuật, tỷ lệ mẫu. ta cần kiểm định giả thiết sau:

*H0* : 𝑓 = p0 = 5%; *H1* : 𝑓 < p0 ở mức α = 5%

* Nếu *H0*

đúng thì ĐLNN: K = 𝑓−𝑝0 √𝑛 ~ N(0,1)

√𝑝0(1−𝑝0)

* Với mức α = 5% ta có: *gtth =* -u1-2α =- 𝜙0

24 −0,05

−1 (1−2𝛼) =- 𝜙

2

0

−1(0,45) = -1,65

Với mẫu cụ thể ta có: K = 800 √800 = -2,6 < *gtth*

√0,05(1−0,05)

* Vậy ta bác bỏ *H0* nghĩa là đợt cải tiến kĩ thuật thật sự làm giảm tỷ lệ phế phẩm

1. Ta kiểm định giả thiết:

*H0* : 𝑓 = p0 = 5%; đối thiết *H1* : 𝑓 ≠ p0 ở mức α = 3%

* Nếu *H0*

đúng thì ĐLNN: K = 𝑓−𝑝0 √𝑛 ~ N(0,1)

√𝑝0(1−𝑝0)

Với mức α = 3% ta có: *gtth =* u1-α = 𝜙0

−1 (1−𝛼) = 𝜙

2

0

−1(0,485) = 2,17

|𝑓−𝑝 |

24

| −0,02|

Với mẫu cụ thể ta có: |K| = 0 √𝑛= 800 √800 = 2,02 < *gtth*

√𝑝0(1−𝑝0)

√0,02(1−0,02)

* Vậy ta chấp nhận *H0* nghĩa là chấp nhận lời tuyên bố của công ty

**Ví dụ 5** (Hà Bích Ngọc): Một công ty bào chế một loại thuốc chữa dị ứng tuyên bố rằng thuốc của họ có hiệu quả không dưới 90% trong việc làm giảm cơn dị ứng trong vòng 8 giờ. Một mẫu gồm 200 người bị dị ứng sử dụng loại thuốc trên, có 160 người giảm cơn dị ứng. Hãy xác định xem lời tuyên bố công ty có giá trị không ? (ở mức ý nghĩa α = 0,07)

**Giải**

* Gọi p là tỷ lệ người giảm dị ứng khi dung thuốc của công ty trong vòng 8 giờ. Ta cần xác định xem p có bằng 90% trở lên hay không. Muốn vậy ta kiểm định giả thiết:

*H0* : 𝑓 = p0 = 90%; *H1* : 𝑓 < p0 ở mức α = 0,07

* Nếu *H0*

đúng thì ĐLNN: K = 𝑓−𝑝0 √𝑛 ~ N(0,1)

√𝑝0(1−𝑝0)

* Với mức α = 0,07 ta có: *gtth =* -u1-2α =- 𝜙 −1

1−2𝛼) =- 𝜙

−1(0,43) = -1,48

0 ( 2 0

160

−0,9

Với mẫu cụ thể ta có: K = 200 √200 = -4,714 < *gtth*

√0,9(1−0,9)

- Vậy ta bác bỏ giả thiết *H0* nghĩa là tuyên bố của công ty không có giá trị. Kết luận ở mức ý nghĩa 0,07